Počiatky

NÁZORNEJ MERBY

pre

nižšie gymnasium a semeniská

sriadil

Dr. Ivan Branislav Zoch,

verejný riadny učbár velvedy a silozpytu.

Oddelenie I.

(pre I. a II. triedu gymn.)

S 83 pôvodcom robenými obrazcami.

(Nákladom pôvodcovým.)

TURČ. SV. MARTIN.

Tlačou kníhtlačiarsko-účastinárskeho spolku.

1873.

Predslovo.

Pomocou školskej knihy má si môcť žiak to, čo ho učbár živým slovom v škole naučil — no a v nižších školách pochopom, poúčkam a výkonom žiak v škole naučiť sa musí — preopakovať, čo možno najrýchlejšie a predca skladne, preto má byť, mojím zdaním, každá školská kniha, čo možno najkratšie ale prísno a určito držaná, aby tak žiakovi zdarný prehľad celej nauky obľahčila. Dobrý učbár bude hľadieť najhlavnejšie poúčky čím najviac príkladami cvičiť. Obyčajné školské knihy písavajú sa súčasne jak pre žiaka tak i pre učbára. Ja toto oddelujem, žiak nech má knižočku krátku, jadrnú, priehľadnú, lacnú, pritom ale celú nauku obsahujúcu. Učbár keď je nie vetvoznalec nech si zaopatrí dielco obšírno, a sbierku príkladov, ktoré žiakom či na domáce či na školské úlohy dáva.

Pri merbe má školská kniha ešte aj ten cieľ, aby žiak z tabule chybne odkreslené obrázce, pri opätnom domácom kreslení mal si odkial opraviť, preto som sa o hojný na kameň vlastnoručne kreslený počet obrazcov postaral.

Už druhú školskú knihu v tomto spôsobe obecenstvu do rúk podávam, a keď si želám, aby sa na koľko možno užitočnou a osožnou stala, ufám sa, že ako Physika už temer úplne sa minula, aj toto dielce, práve pre spomenuté vlastnosti, ktoré som docieliť hľadel, hojného odbytu najde.

Veľká Revúca v auguste 1873.

Pôvodca.

§. 1.

Úvod.

Všetko to, čo viac rovného v sebe obsahuje, volá sa veličinou (die Grösse; quantitas), k. pr. čas, dialka, zdľžka atď. Každú veličinu môžeme na rozličný spôsob určovať. Míle môžeme počítať, merať; funt vážiť atď. Preto máme dvojaké veličiny, a síce číselné a priestorné, pri prvých bere sa ohľad na počet, pri druhých ale na jich rozprestieranie sa, tedy na miesto. S určovaním veličín číselných zaoberá sa počtoveda (arithmetika); s určovaním ale veličín priestorných merba (geometria).

Geometria čili merba je teda taká veda, ktorá určuje veličiny ohľadom jích rozsiahlosti, čili jích rozprestierania sa v priestore. Merať ale znamená hľadať, koľko ráz istá priestorná jednosť, v nejakej priestornej veličine obsažená je. Čiara, lúka, dom, dach sú priestorné veličiny. Toto rozprestieranie sa veličín môže sa diať v troch smeroch, a síce: v zdĺžke, šírke a hrúbke (výške, hĺbke).

Keď sa priestorná veličina len v jednom smere rozprestiera, voláme ju čiarov (linea); keď sa priestorná veličina vo dvoch smeroch rozprestiera, volá sa plochou, a oba smery zdĺžkou a šírkou; veličina konečne, ktorá vo troch smeroch zdĺžke, šírke a hrúbke (výške abo hĺbke) sa rozprestiera, volá sa telesom.

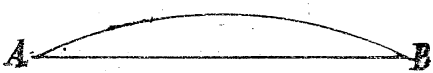
Teleso je tedy so všetkých strán ohraničený priestor. Hranice telesa sú plochy, hranice plochy sú čiary, hranice čiary ale sú body. Bod je nie veličina, lebo nemá žiadnej rozsiahlosti. — Merický čili geometrický bod a geometrická čiara nedajú sa nakresliť, tie si len mysleť môžeme. Tie body a čiary, ktoré na papieru a tabuli kreslíme, sú len jich znakmi.

§. 2.

Čiary (Linien.)

Veličina len v jednom smere sa rozprestierajúca, volá sa čiarou; jej hranice sú body. Postupujú-li body v čiare v jednom a tom istom smere, voláme čiaru tú prímkou čili prostou čiarou (gerade Linie) ku pr. (obr. 1.) Prímka má tú vlastnosť, že je najkratšou, medzi dvoma bodami ťahať sa dajúcou čiarou. (Obr. 2.) Prímka slúži tedy k určeniu vzdialenosti dvoch bodov.

Obr. 1.

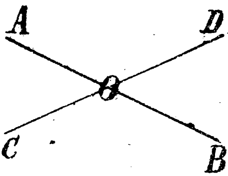


Obr. 2.

Medzi dvoma bodami je tedy len jedna prímka možná, z toho nasleduje, že dvoma bodami poloha, smer a veľkosť prímky úplne určiť sa dá. Ponevádž bod značíme jednou (veľkou) písmenou, budeme prímku značiť dvoma najkrajnejšíma bodama, a tak dvoma písmenama. Keď dve prímky aspoň dva body spoločne majú, tedy kryjú sa, t. j. padnú jedna na druhú.

Keď dve prímky len jedon spoločný bod majú, vravíme že sa presekúvajú, a ten spoločný bod voláme priesečníkom ku pr. prímka AB a CD sa presekúvajú, bod O je jich priesečník. (Obr. 3.)

Keď body v čiare nepostupujú v jednom a tom istom smere, voláme čiaru tú krivicou (krumme Linie).

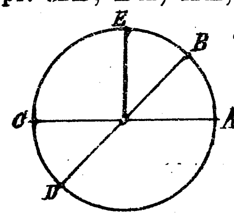


Obr. 3.

Krivé čiary čili krivice sú pravidelné, keď v tom istom krivom smere dľa istého pravidľa postupujú; a nepravidelné, keď postup jich bodov dľa pravidľa neriadi sa. (Obr. 4.)

Obr. 4.

Medzi pravidelnými krivicami zastupuje prvé miesto kruh (Kreis; circulus;) t. j. taká krivica, ktorej každý bod od jistého daného bodu *O* rovnak vzdialený je (obr. 5.) Bod tento *O* volá sa stredobodom (centrum; Mittelpunkt.) Celá čiara kruhu volá sa obvodom (peripheria); jedna čiastka obvodu ku pr. *AB*, *BE*, *AE*, volá sa oblukom (arcus.) Keď nejaký bod obvodu so stredobodom prímkou spojíme, dostaneme polmer, ku pr. *AO*, *BO*, *OD*, *OC* atď. (radius). V jednom kruhu sú všetky polmery rovné. Keď polmer cez stredobod až ku obvodu predĺžime, dostaneme priemer (diameter), ku pr. *BD*. Obvod kruhu delí sa na 360 čiastok. Jednu takúto čiastku voláme stupňom (gradus), a značíme ho znakom $^\circ$, $1^\circ = 60'$ (menšín, minút), $1' = 60''$ (vtorín, sekúnd.) Polobvod má 180°, štvrť obvodu má 90°, tri štvrte obvodu 270°.



Obr. 5.

§. 5.

Veličina vo dvoch smeroch: zdĺžke a šírke sa rozprestierajúca volá sa plochou; jej hranice sú čiary. Plochy sú ploské a ohnuté. Prvá určená je troma bodami a volá sa rovinou. Ohraničená plocha zovie sa obrazcom, vegorou, figúrou.

Na obrazci rozoznávame hraničiace čiary, ktoré stranami zovieme, a jích súhrn obvodom zvaný. Veľkosť plochy značí jej povrch čili ploský obsah. Znázorni na predmetoch!

Veličina v troch smeroch (ktorých?) sa rozprestierajúca zovie sa telesom. Telesá sú hranaté a okrúhle. Jích hranice sú plochy, ktoré bokami zovieme; súhrn všetkých bokov dá povrch telesa, telesom zaujatý ale priestor voláme krýchlovým, čili kubičným obsahom.

Každú veličinu priestornú meráme, t. j. určujeme koľko ráz istá známa jednosť v nej obsažená je. Meranie je trojaké: v jednom smere, meranie v zdĺžké; vo dvoch smeroch, meranie štvoročné; v troch smeroch, meranie krýchlové, čili kubičné.

§. 6.

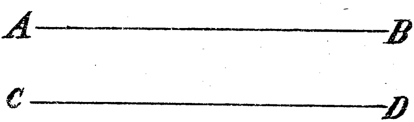
Merba delí sa na dve čiastky, a síce na: merbu ploskú (Planimetria), a celinomerbu (Steriometria).

I. Oddiel. Plosková merba.

A) Prímky a obrazce prímkové.

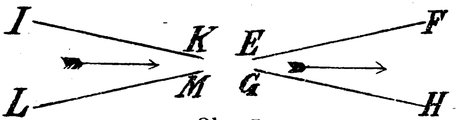
§. 7.

Dve prímky môžu mať v ploche dvojakú polohu, alebo idú obe v jednom a tom istom smere, a volajú sa rovnobežnými ku pr. $AB \parallel CD$ (obr. 6.); alebo idú v smere odchýlnom, a vtedy sú sbiehavé (convergent), ku pr. IK a LM, alebo rozbiehavé (divergent) ku pr. EF a GH. (Obr. 7.)



Obr. 6.

Prímku rovnobežnú s hladinou čili povrchom vody, voláme vodorovnou, ktorá v obyčajnom živote s obzor-



Obr. 7.

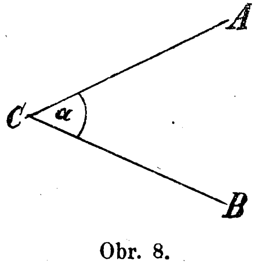
nou (horizontálnou) splynie. Prímka o 90° od vodorovnej odchýlená, volá sa kolmou (Senkrechte.) Znázorni!

Veľkosť prímky určujeme meraním, t. j. hľadaním koľkoráz isté jedno v nej obsažené je. Za jedno bere sa u nás stopa ('), a delí sa na 12 palcov (''); palec má 12 čiarok ('''); 6 stôp dáva siahu (°), a 4000 siah čili 24.000' mílu. Druhá jednomiera je merťuch čili metr=3,1635'; 1 metr má 10 decimetrov; 1 decimetr 10 centimetrov; 1 centimetr 10 millimetrov; 10 metrov volá sa dekametrom, 10 dekametrov hektometrom, 10 hektometrov kilometrom, a 10 kilometrov myriametrom. Ukáž jak velké sú tieto miery, koľko stôp asi je naša svetlica široká, koľko vysoká, koľko dlhá? —

§. 8.

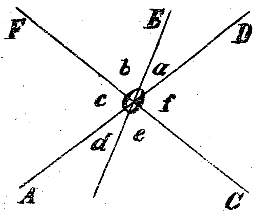
Uhly (Winkel; angulus.)

Odchyl dvoch prímok, ktoré v jednom bode sa presekúvajú, voláme uhlom. Prímky uhol tvoriace voláme jeho ramenami *AC* a *BC*. (Obr. 8.) Bod *C*, v ktorom sa ramená presekúvajú volá sa vrcholom (Scheitel.)



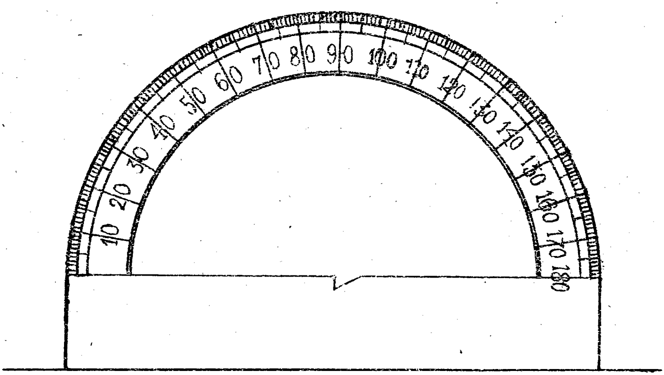
Obr. 8.

Uhol značíme znakom ∢, a pomenúvame ho alebo jednou malou písmenou, ktorú do otvoru napíšeme, alebo troma písmenami tak, že písmenu na vrchole, medzi písmeny na ramenách položíme, a tak aj vyslovíme, tedy ∢ *BCA*. Pomenujte všetky uhly v obr. 9. Dva uhly, ktorých ramená sú rovnobežné, sú rovné.



Obr. 9.

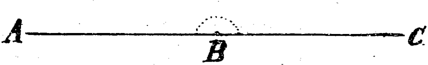
Velkosť uhlov závisí jedine od veľkosti odchylku, a nie od veľkosti ramien. Veľkosť túto meriame pomocou uhlomera (transporteur), ktorý obr. 10. znázorňuje. Meraj dané uhly a povedz: ako sa to deje?



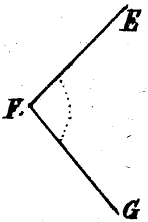
Obr. 10.

§. 9.

Uhol, ktorého ramená práve oprotivný smer majú, volá sa rovným a obsahuje vždy 180° (obr. 11.) $\sphericalangle ABC$ je rovný uhol.

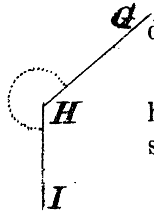


Obr. 11.



Obr. 12.

Uhol menší než 180° volá sa poddutým, ako je uhol EFG. (Obrazec 12.)

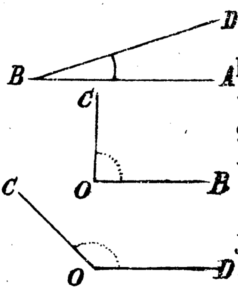


Obr. 13.

Uhol väčší než 180° volá sa vydutým ku pr. GHI. (Obr. 13.)

Poznam.: Keď o uhlu zvlášť nehovoríme, žeby bol vydutý, rozumie sa vždy uhol poddutý.

§. 10.



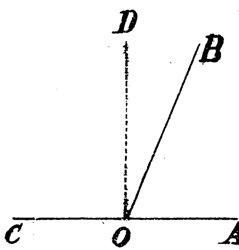
Obr. 14.

Podduté uhly sú trojaké, a síce, keď uhol obnáša 90° volá sa pravým (rectus) $=$ R. Uhol menší než 90° majúci, volá sa ostrým; uhol väčší než 90° ale tupým.

Uhol ABD je ostrý, $\sphericalangle BOC$ je pravý, $\sphericalangle DOC$ ale tupý. (Obr. 14.)

§. 11.

Dva uhly, ktoré spoločný vrchol a jedno spoločné rameno majú, volajú sa príuhlami, ku pr. $\sphericalangle AOB$ a BOC. (Obr. 15.)



Obr. 15.

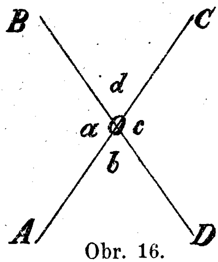
Poučka: Súčet príuhlou rovná sa dvom pravým $\doteq 180.^\circ$

Dôkaz: Postav v O kolmú, OD, tak rozpadne sa uhol BOC na dva, jeden pravý DOC, a druhý ostrý BOD, ktorý ale s uhlom AOB druhý pravý uhol tvorí.

Koľko stupňov obnášajú všetky uhly na jednom boku prímky? koľko všetky uhly okolo jednoho bodu?

§. 12.

Dva uhly, ktoré té isté prímky na protivnej strane po jích prieseku tvoria, volajú sa vrcholovými ku pr.



Obr. 16.

uhol AOB a COD. (Obrazec 16.)

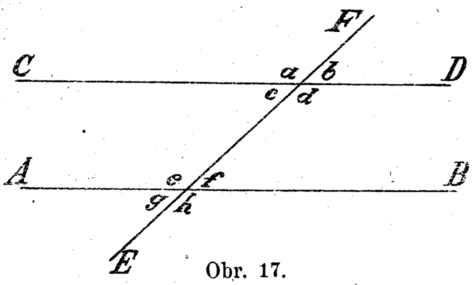
Poučka: Vrcholové uhly sú medzi sebou rovné, tedy $\sphericalangle a = \sphericalangle c$; $\sphericalangle d = b$.

Dôkaz: $\sphericalangle a$ a $\sphericalangle b$ spolu majú 180^0, taktiež $\sphericalangle b$ a $\sphericalangle c$, preto je $a+b=b+c$, vynechámeli z rovného rovné, tedy b, zostane rovné, tedy $a=c$. Alebo $d+a=180^0$

$a+b=180^0$ tedy $d+a=a+b$ odčítame, a zostane $d=b$.

§. 13.

Keď dve rovnobežné prímky treťou presekneme, povstanú po 1. uhly súvislé: a, g; b, h; c, e; d, f; po 2. krížové uhly, a síce vňútorné c, f; a e, d; a zovňútorné a, h; a b, g; a po 3 protiuhly a, e; b, f; c, g; d, h. (Obr. 17.)



Obr. 17.

O týchto uhloch dokážeme:

1. Protiuhly sú rovné, tedy $a=e$, $b=f$, $c=g$, $d=h$, poneváč jích ramená rovnobežné sú.

2. Krížové uhly sú rovné, tedy $c=f$, $d=e$, $a=h$, $b=g$.

Dôkaz: $c=g$, bo sú protiuhly; $g=f$, bo sú vrcholové uhly, tedy i $c=f$.

Alebo: $a=d$ bo sú vrcholové uhly,

$d=h$ bo sú protiuhly, tedy i $a=h$.

3. Súvyslé uhly obnášajú spolu 180°, tedy $c+e=180^\circ$; $a+g=180^\circ$; $d+f=180^\circ$; $b+h=180^\circ$.

Dôkaz: $g+e=180$, bo sú príuhly,

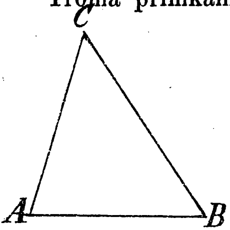
$g=c$, bo sú protiuhly; preto možno miesto g, c dosadiť, tedy $c+e=180^\circ$.

Ako bude opak tejto poučky? Prečo sú dve prímky, ktoré na tretej kolmo stoja medzi sebou rovnobežné?

§. 14.

Trojuhelník.

Troma prímkami ohraničený obrazec volá sa trojuhelníkom, a značí sa troma písmenami, ku pr. $\triangle ABC$. (Obr. 18.)

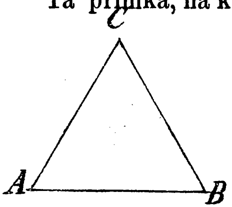


Obr. 18.

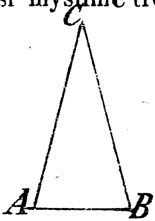
V každom trojuhelníku prichodí šesť kusov, tri strany AB, BC, AC a tri uhly ABC, ACB, BAC.

Dve strany trojuhelníka spolu sú vždy vätšie nežli tretia, lebo je táto najkratšou vzdialenostou, tedy $AC+BC>AB$.

Tá prímka, na ktorej si myslíme trojuhelník postavený, volá sa základňou, spodlinou AB. Proti postavený uhol zovie sa vrcholom ACB.



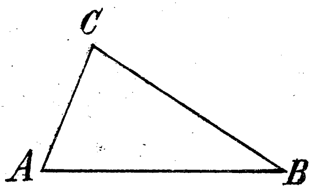
Obr. 19.



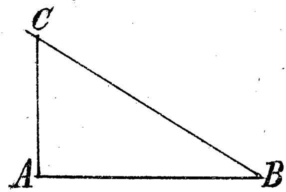
Obr. 20.

Kolmá z vrcholu na základnú ale výškou CD.

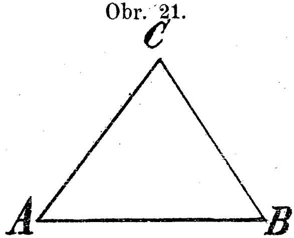
Ohladom na strany môže byť trojuhelník rovnostraný (trojec), (obr. 19.), keď má všetky strany rovné, rovnoramený (obr. 20.), keď má dve strany (ramená) rovné, a nerovnostraný, keď sú strany nerovné (obr. 21.) Ohľadom na uhly je ale trojuhelník pravouhelný (pravouhelník) (obr. 22.), keď je jedon uhol pravý; ostrouhelný (obr. 23.), keď sú všetky uhly ostré, a tupouhelný (obr. 24.), keď je jedon uhel tupý.



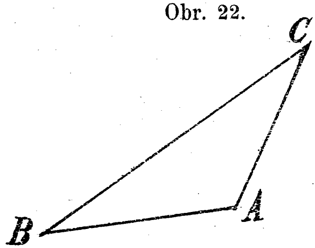
Obr. 21.



Obr. 22.



Obr. 23.

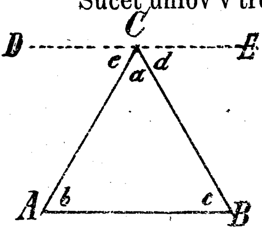


Obr. 24.

§. 15.

Poučky.

Súčet uhlov v trojuhelníku obnáša dva pravé $= 180^{\circ}$, $a + b + c = 180^{\circ}$.



Obr. 25.

Dôkaz: Cez vrchol obr. 25. ťahaj DE rovnobežne s AB, teda

$$\sphericalangle a = a$$
$$c = d$$
$$b = e$$

spolu $a + b + c = a + d + e$ ale $a + d + e = 180^{\circ}$ bo sú príuhly, tedy $a + b + c = 180^{\circ}$.

Vonkajší uhol, ktorý povstane predĺžením jednej strany, rovná sa súčtu oboch vňútorných proti ležiacich $d = a + c$. (Obr. 26.)

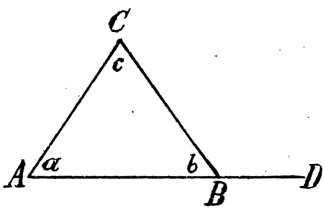
Dôkaz: $a + b + c = 180^\circ$

$b + d = 180^\circ$ príuhly

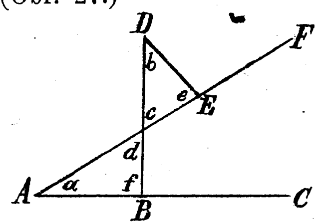
tedy $a + b + c = b + d$, odtiahnúc b

zostane $a + c = d$.

Dva uhly, ktorých ramená kolmo jedno na druhom stoja, sú rovné. $\sphericalangle\ a = b$. (Obr. 27.)



Obr. 26.



Obr. 27.

Dôkaz: $a + d + f = 180^\circ$

$b + c + e = 180^\circ$ tedy

$a + d + f = b + c + e$, ale odtiahnúc

$d = c$ vrcholové

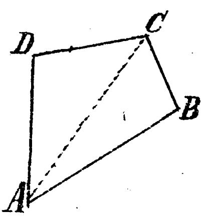
$f = e$ pravé

zostane $a = b$.

Ako vypadne dôkaz, keď sú uhly tupé?

§. 16.

Štvoruhelník.



Obr. 28.

Štyrmi stranami ohraničený obrazec volá sa štvoruhelníkom. Štvoruhelník pozostáva tedy z osem kusov, štyroch strán a štyroch uhlov. Tá prímka, ktorá protiležiace uhly spojuje, volá sa priečnicou (diagonale) AC. (Obr. 28.)

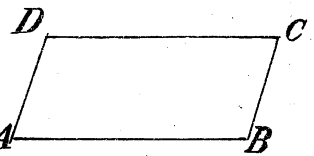
Priečnica delí štvoruhelník na dva trojuhelníky, a preto obnášajú všetky uhly v štvoruhelníku 4 pravé $=$ 4 $R = 360^{0}$.

Ohladom na obapolnú polohu strán je štvoruhelník:

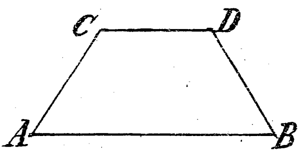
1) rovnobežník, (parallelogramm), keď sú dve a dve strany rovnobežné. (Obr. 29.);

2) lichobežník (trapez), keď sú len dve strany rovnobežné (obr. 30.) a

3) nerovnobežník, keď je ani jedna strana nierovnobežná s druhou (trapezoid). (Obr. 28.)



Obr. 29.

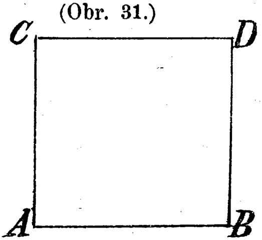


Obr. 30.

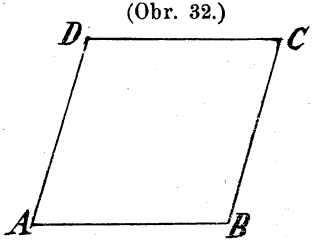
Rovnobežníky sú zase ohľadom na strany alebo rovnostrané, alebo nerovnostrané; obydva druhy zase sú alebo pravouhlé, alebo nepravouhlé, tedy:

Rovnobežníky rovnostrané

pravouhlý	nepravouhlý
štvorec	kosoštvorec
quadrat.	rhombus.
(Obr. 31.)	(Obr. 32.)



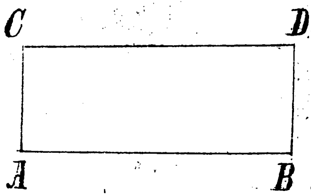
Obr. 31.



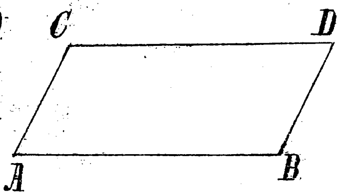
Obr. 32.

Rovnobežníky nerovnostrané:

pravouhlý	nepravouhlý
obďalník	kosoďalník
oblongum.	rhomboid.
(Obr. 33.)	(Obr. 34.)



Obr. 33.



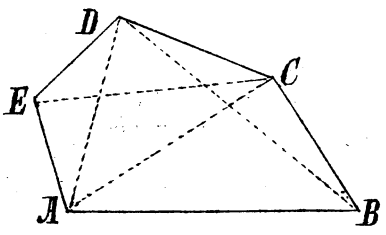
Obr. 34.

§. 17.

Mnohouhelníky.

Každý viac, než štyrma stranami ohraničený obrazec zovie sa mnohouhelníkom (polygon). Mnohouhelník dostáva meno svoje od množstva strán, je tedy päť, šesť atď uhelník.

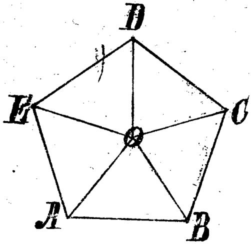
Ohľadom na veľkosť strán a uhlov máme pravidelné mnohouhelníky, ktoré všetky strany a uhly rovné majú, a opak toho nepravidelné. (Obr. 35.) Koľko priečnic má tedy troj, štvor, päť atď. uhelník?



Obr. 35.

Súčet všetkých uhlov v mnohouhelníku obnáša toľkoráz po dva pravé, koľko má mnohouhelník strán, menej 4 pravé.

Dôkaz: Rozdel mnohouhelník z jednoho bodu v prostriedku na trojuhelníky. (Obr. 36.) Trojuhelníkov bude



Ob. 36.

práve toľko, koľko strán, a teda i toľkoráz po dva pravé. Keď z toho odčítame ale uhly okolo bodu O, ktoré spolu 4 pravé majú, dostaneme ako hore povedano, súčeť všetkých uhlov. K. pr. obr. 36. je päťuhelník, tedy $2 \times 5 = 10$ pravých, menej $4 = 6$ pravých $= 540^0$.

Dobrý žiak vynájde ešte:

Koľko stupňov obnáša uhol v trojcu? $\frac{180^0}{3} =$

" " " " v štvorcu? $\frac{360^0}{4} =$

" " " " v pravid. pätorcu? $\frac{540^0}{5} =$

" " " " v šestorcu? $\frac{720}{6} =$ atď.

B) O shodnosti.

§. 18.

Dva obrazce, tedy i dva trojuhelníky sú shodné, keď majú rovnakú podobu a veľkosť, a keď sa len rozličnosťou miesta rozoznávajú, tak že jeden na druhý položené sa úplne zakryjú.

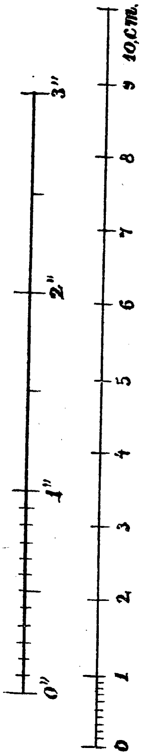
V shodných trojuhelníkoch sú tedy strany rovným uhlom, a uhly rovným stranám oproti ležiace rovné.

Dva trojuhelníky sú shodné:

1) Keď jednu stranu a na nej ležiace uhly;
2) keď dve strany a nými tvorený uhol;
3) keď dve strany a väčšej oprotiležiaci uhol, a po
4) keď všetky tri strany obapolne rovné majú.

Shodnosť značí sa znakom $\cong$.

Poučky tieto znázorní učiteľ výkresami, dá sostrojovať shodné trojuhelníky, keď dané sú *a)* jedna strana a na nej ležiace uhly, *b)* dve strany a nimi tvorený uhol, *c)* dve strany a väčšej oproti ležiaci uhol, *d)* všetky tri strany.



Obr. 37.

Každý žiak má mať stopový alebo centimetrový merťuch a uhlomer, a sostrojuje dľa danej miery, ku pr. strana $2'' \, 5'''$, na nej ležiace uhly 36^0 a 42^0; alebo 9 *cm* a 6 *cm*, 2 *mm* strany, 56^0 nimi tvorený uhol atď.

Pripojený obr. 37. predstavuje 3 palcový a centimentrový merťuch.

§. 19.

Poučky na shodnosti založené.

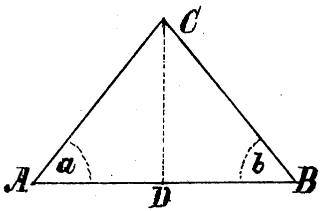
1. Rovným uhlom oproti ležia i rovné strany, a naopak. (Obr. 38.)

Jeli $a = b$, tedy je i $AC = BC$.

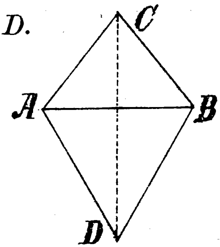
Dôkaz: Ťahaj z vrchola kolmú CD. Trojuhelníky povstalé sú shodné, lebo $\sphericalangle a = b$, uhly pri D sú pravé, a tedy i uhly pri C rovné, strana CD je ale v oboch spoločná (I. pád shodnosti), preto i strana $AC = BC$.

2. Keď na tej istej prímke dva rovnoramené trojuhelníky postavíme, a jích vrchole spojíme, poltí spojujúca prímka predne uhle na vrcholu, potom danú základnú, a stojí na základnej kolmo. (Obr. 39.)

Dané je: $AC = BC$, $AD = BD$.



Obr. 38.



Obr. 39.

Dokázať sa má: 1) $a=b$, $e=f$; 2) $AE=EB$; 3) $CE \perp AB$ čili že $c=d=90°$.

Dôkaz: $\triangle ACD \cong CDB$ (4. pád shodnosti) tedy
i $a=b$, a $e=f$.
$\triangle ACE \cong CEB$ (2. pád shodnosti),
tedy i $AE=EB$, a $c=d$, ale
$c+d=180$, tedy $c=d=90°$.

Prevedz dôkaz, keď sú trojuhelníky oba na jednom boku základnej!

3. Keď v rovnoramenom trojuhelníku z vrchola na základniu kolmú spustíme, poltí ona uhol na vrcholu a základniu. (Obr. 40.)

Dané je $AC=BE$, t. j. rovnoramený trojuhelník a $c=d=90°$ t. j. $CD \perp$ na AB.

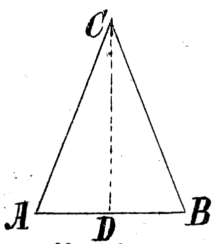
Dokázať sa má: $a=b$, $AD=DB$.

Dôkaz: $\triangle ADC \cong BCD$ (3. pád shodnosti), tedy
$a=b$, $AD=DB$.

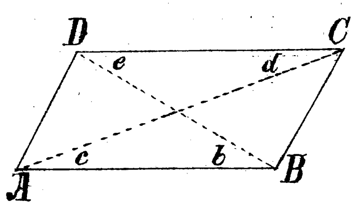
4. Keď v rovnoramenom trojuhelníku stred základnej s vrcholom spojíme, stojí spojujúca prímka na základnej kolmo.

Dobrý žiak dokáže sám, slabšiemu ukáže učbár.

5. Každá priečnica poltí rovnobežník na dva shodné trojuhelníky, obe priečnice ale poltia sa medzi sebou. (Obr. 41.)



Obr. 40.



Obr. 41.

Dané je: $AD=//BC$, $DC=//AD$.

Dokázať sa má: 1. $ADB \cong DBC$; 2. $DE = BE$
alebo: $ACD \cong ABC$; $AE = EC$.

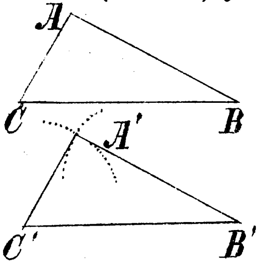
Dôkaz: $b = e$ vňútorné krížové uhly
$AB = DC$
$DB = DB$ tedy $\triangle ADB \cong DBC$ dľa 2. pádu shodnosti.

$\triangle AED \cong DEC$ (1. pád shodnosti) lebo
$b = e$
$c = d$ vňútorné krížové
$AB = CD$ a tak i $DE = BE$ a $AE = EC$.

§. 29.

Úlohy sostrojenia na shodnosti trojuholníkov sa zakladajúce.

1. Sostroj trojuhelník, ktorý s daním trojuhelníkom ABC (obr. 42.) je shodný.

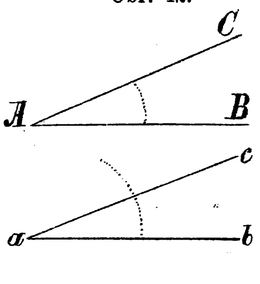


Obr. 42.

Sostrojenie: ťahaj si prímku; vezmi prímku BC do kružidla, prenes na ťahanú prímku $BC = B'C'$, vezmi do kružidla AB; opíš z B' oblúk; vezmi AC do kružidla a opíš s ním oblúk z C'; priesečník oblúkov A' spoj s B' a C' a tak je trojuhelník $B'A'C' \cong BAC$

Dôkaz: $BC = B'C'$ dľa sostrojenia; $AB = A'B'$, tak i $AC = A'C'$, tedy sú všetky tri strany obapolne rovné, a tak trojuhelníky dľa štvrtej poučky shodné.

2. Sostrojenie a prenášanie uhlov.

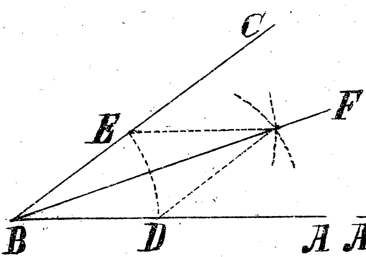


Obr. 43.

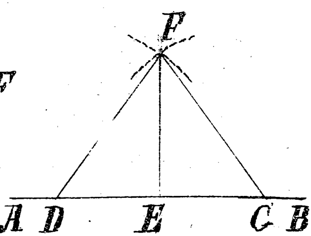
Ľubovolným otvorom opíš z vrchola oblúk (obr. 43.) ten istý i na prímke $a\,b$, na ktorú uhol prenášaš, odmeraj zdĺžku oblúka uhlu, prenes ju na obluk na prímke, a ťahaj rameno AE; uhol $CAB = cab$.

Dôkaz: Ťahaj pomocnú prímku ED a eb, tedy sú povstalé trojuhelníky $ADE \cong abc$, dľa 4. pádu shodnosti, tedy i (uhol) $\sphericalangle\ CAB = cab$.

3. Poltenie uhlov. Opíš ľubovolným otvorom kružidla oblúk DE (obr. 44.) Opíš ľubovolné obluky z D a E, a spoj priesečník F s vrcholom, tedy je $\sphericalangle FBC = FBA = \frac{1}{2}\ ABC$.



Obr. 44.



Obr. 45.

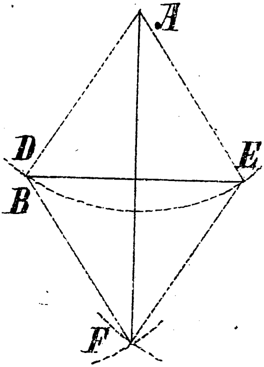
Dôkaz: Ťahaj pomocné prímky FE a FD, tedy bude $\triangle\ BDF \cong DFE$, dľa 4. pádu shod.; bo je $BD = BE$; $DF = EF$; BF je spoločná.

4. Sostrojenie kolmej.

a) Sostroj kolmú v danom bode E prímky AB. Ľubovolným otvorom kružidla odsekní z E (obr. 45.) rovné kusy $DE = EC$, a ťahaj z D a E ľubovolné oblúky, jích priesečník F spoj s C, teda je FC daná kolmá.

Dôkaz: Ťahaj pomocné prímky DF a FC, teda je $\triangle\ DFC \cong FCB$, dľa 4. pádu shod.; bo je $DF = FC$; $DE = EC$, dľa sostrojenia; a FE je spoločná, preto je i $\sphericalangle\ FED = FEC$; $FED + FEC = 180^{\circ}$, a preto $FED = FEC = 90^{\circ} = \mathrm{R}$, t. j. prímka FE stojí v bode E kolmo na prímke AB.

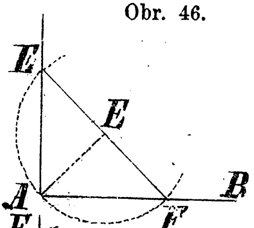
b) Z daného bodu A spusť kolmú na BC. Ľubovolným otvorom kružidla, z A (obr. 46.) preseknem prímku BC v D a E, a E, ťahám z D a C ľubovolné obluky, jích priesečník F spojím s bodom A, teda je AG kolmá na BC.

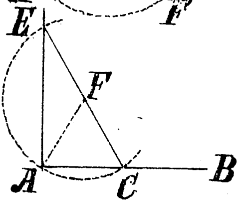


Obr. 46.

Dôkaz: Ťahaj pomocné prímky AD, AE, DF a FE, teda je $\triangle\ ADF \cong AEF$ dľa 4. poučky, lebo $DA = AE$; $DF = FE$, $AG = AG$, tedy i $\sphericalangle\ c = d$; poneváč ale $\sphericalangle\ c + d = 180^0$, tedy je $c = d = 90^0 =$ R, a tak AG stojí kolmo na BC.

c) Postav kolmú na konci prímky v A. Z ľubovolného bodu C ľubovolným otvorom kružidla opíš kruh (obr. 47.), tak, že cez konec prímky A pôjde; priesečník F spoj s C a predĺž až oblúk presekneš v E, ťahaná EA je žiadaná kolmá.





Obr. 47.

Dôkaz: Ťahaj pomocnú prímku CA; trojuhelníky ACE a ACF sú rovnoramené a tak i $\sphericalangle\ a = c$, $d = e$; $\sphericalangle\ a + b + c + d + e + f = 4\,\mathrm{R} = 360^0$; $b + f = 2\,\mathrm{R} = 180^0$, tedy i $a + c + d + e = 2\,\mathrm{R} = 180^0$, ale $a = c$
$c = d$, tedy i $a + c = c + d = \mathrm{R} = 90^0$, t. j. prímka AC stojí kolmo na AB.

To isté druhým spôsobom: Ľubovolným otvorom odsekni kus AC (obr. 48.); tým istým otvorom hľadaj priesečník F; z F opíš tým istým otvorom kruh, ťahaj FC a predĺž do E, EA je žiadaná kolmá.

Dôkaz: Ťahaj pomocnú FA, tedy je $\triangle\ AFC$ rovnostraný, a jeho uhly majú teda po 60^0, vonkajší uhol $EFA = 120^0$, teda uhol $EAF + AEF = 60^0$; poneváč sú ale rovné, teda majú po 30^0, a tak má $\sphericalangle EAB$ $60^0 + 30^0 = 90^0$, t. j. je pravý; prímka EA stojí teda kolmo na AB.

§. 21.

Úlohy k vypracovaniu.

1. Sostroj trojuhelník, keď dané sú:
   a) jedna strana a na nej ležiace uhly;
   b) jedna strana, jeden príležiaci a jeden oprotiležiaci uhol;
   c) dve strany a nimi tvorený uhol;
   d) dve strany a väčšej oproti ležiaci uhol;
   e) všetky tri strany.
2. Sostroj rovnoramený trojuhelník, keď sú dané:
   a) základná a príležiaci uhol;
   b) základná a uhol na vrcholu;
   c) jedno rameno a uhol na základnej;
   d) základná a výška;
   e) výška a vrcholový uhol.
3. Sostroj rovnostraný trojuhelník, keď je daná:
   a) jedna strana;
   b) výška.
4. Sostroj pravouhelný trojuhelník, keď dané sú:
   a) obe kathety;
   b) hypothenusa a jedna katheta;
   c) hypothenusa a jeden príležiaci uhol;
   d) katheta a príležiaci ostrý uhol.
5. Sostroj rovnobežník, keď dané sú:
   a) dve strany a nimi tvorený uhol;
   b) dve strany a priečnica;
   c) jedna strana a obe priečnice;
   d) priečnice a nimi tvorený uhol.

6. Sostroj kosoštvorec, keď dané sú:
   a) jedna strana a uhol;
   b) jedna strana a výška;
   c) jedna strana a priečnica.
7. Sostroj obďalník, keď dané sú:
   a) dve strany;
   b) strana a priečnica.
8. Sostroj štvorec, keď je dana strana.
9. Sostroj lichobežník, keď dané sú všetky tri strany.
10. Rozdeľ pravý uhol na tri čiastky.
11. Rozdeľ danú prímku na viac čiastok.
12. Sostroj mnohouhelník shodný s daným mnohouhelníkom.

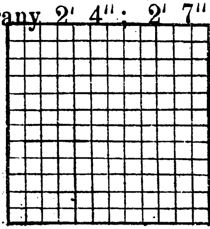
Rozdeľ mnohouhelník daný priečnicami na trojuhelníky, a sostrojuj postupne tieto, tak dostaneš konečne shodný mnohouhelník.

C) Obvod a povrch prímočiarnych obrazcov.

§. 22.

Hraničiace prímky obrazca spolu tvoria jeho obvod (Umfang; peripheria); plocha nimi uzavretá volá sa povrchom, alebo ploským obsahom (Flächeninhalt).

Príklady: Jak veľký je obvod trojuhelníku, ktorého strany 2′ 4″; 2′ 7″; a 3′ 2″ obnášajú? Obďalník má základňú 3′ 4″ dlhú a výšku 2′ 8″ veľkú, koľký je jeho obvod? Lichobežníka strany majú postupne 2′ 3″; 3′ 1″; 4′ 5″; a 9″ zdlžky, jaký je jeho obvod? Aby sme mohli povrch nejakého obrazca určiť, musíme mať istú jednosť, s ktorou tú plochu porovnáme a hľadáme, koľko ráz tá jednosť v celej ploche obsažená je. Za jednosť bere sa u nás



Obr. 49.

štvorcová stopa $= 1\square'$, t. j. plocha štvorcová so stranou $1'$ dlhou, asi veľký štvrťhárok; $1\square'$ má 144 štvorcových palcov, čili štvorcov, ktorých strana jeden palec dlhá je. Štvorcový palec predstavuje obr. 49. Každý štvorcový palec má 144 štvorcových čiar $= 144\square'''$, ako to na tomže obrazci vidno. $36\square'$ dajú jednu štvorcovú siahu, t. j. štvorec, ktorého každá strana 1 siahu zdĺžky má. 16 millionov štvoročných siah tvoria jednu štvoročnú mílu. Keďby sme chceli merať pole hneď na štvoročné siahy, museli by sme taký rám, ktorého každá strana by 1^0 mala jedno poli druhého klásť a tak čítať, kde by sa ten siahový rám nesmestil, tam by sme museli stopový, palcový atď. ukladať. Takéto meranie by bolo veľmo nepríhodné, preto zvykli sme povrch tak určovať, že z pomeranej zdĺžky a šírky povrch vypočtujeme dľa nasledujúcich pravidiel:

1. Povrch štvorca vynájdeme, keď danú stranu samosebou násobíme; ku pr. jak veľký je povrch štvorca, ktorého strana $3'\ 4''$ obnaša?

Odpoveď: $3'\,4'' \times 3'\,4'' = 40'' \times 40''$

$$1600 : 144 = 11\square'\ 16\square'';$$

abo $3\frac{1}{3}' \times 3\frac{1}{3}' = \frac{10}{3}' \times \frac{10}{3}' = \frac{100}{9}\square' = 100 : 9 = 11\frac{1}{9}\square'$

2. Povrch obďalníka vynájdeme, keď jeho šírku zdĺžkou násobíme; ku pr. jakveľká je jedna tabla, ktorej šírka $2'$, $4^1/_2{}''$, zdĺžka ale $4'$, $3''$ obnáša?

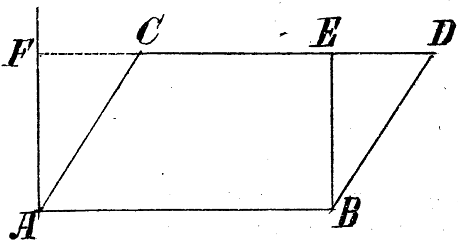
Odpoveď: $4'\,3'' \times 2'\,4\frac{1}{2}' = 2{,}454 \times 4{,}25$

$$\begin{array}{r} 9816 \\ 4908 \\ 12170 \\ \hline 10{,}42950\,\square' \end{array}$$

3. Povrch rovnobežníka vôbec.

Poučka: Každý kosouhelný rovnobežník možno na pravouhelný premeniť. Postav v A (obr. 50.) kolmú, podobne v B a predĺž CE, tedy je $AEFB = ACBD$.

Dôkaz: $\triangle\ AEC \cong FBD$, dľa 2. shod., lebo je strana $AC = BD$, čo protivné strany rovnobežníka, $EA = BF$, lebo sú kolmé medzi rovnobežnými, $\sphericalangle\ EAC = FBD$, poneváč sú jích ramená rovnobežné. Priložíme-li k figúre $ACBF$ raz $\triangle\ FBD$, druhýraz ale s FBD shodný AEC, dostaneme v prvom páde kosoďalník $ACDB$, v druhom ale jemu rovný obďalník $ABFE$, lebo rovné k rovnému pridaté dá zase rovné.



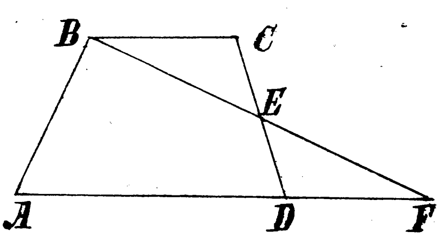
Obr. 50.

Poneváč tedy každý kosoďalník na obďalník premeniť sa dá, nasleduje: povrh každého rovnobežníka nájdeme, keď násobíme základnú výškou.

4. Povrch lichobežníka.

Každý lichobežník dá sa premeniť na rovnak veľký trojuhelník. Polti stranu CD (obr. 51.), ťahaj BE, až sa s predĺženou základnou pretne, teda je $\triangle\ ABF = ABCD$.

Dôkaz: $\triangle BCE \cong DEF$ (dľa 1. poučky o shodnosti), keď tedy vezmeme trojuhelník BCE preč, a priložíme ho do EDF, dostaneme práve tak veľký trojuhelník, ako bol lichobežník.



Obr. 51.

Základná tohoto trojuhelníka rovná sa $AD + DF$, čili $AD + BC$ (poneváč $DF = BC$), čili súčtu oboch rovnobežných strán lichobežníka. Z toho nasleduje: povrch lichobežníka nájdeme, keď súčet oboch rovnobežných strán pol výškou násobíme; ku pr. rovnobežné strany lichobežníka obnášajú 8'' a 3''; výška jeho je 7'', jak veľký je jeho povrch? Odpoveď: $11'' \times 3\frac{1}{2}'' = 11'' \times \frac{7}{2}'' = \frac{77}{2}\square'' = 77 : 2 = 38\frac{1}{2}\square''$

17
1

5. Povrch pravidelného mnohouhelníka nájdeme, keď jeho obvod vzdialenosťou strany od stredobodu násobíme, a dvoma delíme (dôvod?), ku pr. strana šestiuhelníka obnáša 4', jej vzdialenosť od stredobodu 3, 3', jak veľký je jeho povrch? 4×6

$24 \times 3,3$

72
72

$79,2 : 2 = 39,6\square'$

19
12

6. Povrch nepravidelného mnohouhelníka vynájdeme, keď si ho na trojuhelníky podelíme, a tieto každý osobyte vypočtujeme.

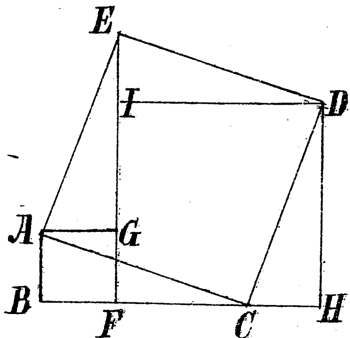
Poznam: Všetky tieto pravidlá cvičí učbár na mnoho a mnoho príkladoch, z čiastky v škole, z čiastky dáva domáce úlohy, a konečne zkúša dľa školskej práce.

§. 23.

Pythagorova poučka.

Štvorec na hypothenuse rovná sa súčtu štvorcov na oboch kathetach. $ACDE = AGFB + IDHF$ (obr. 52.)

Dôkaz: Ťaháme-li kolmé AG, EF, DH a ID, bude veliký štvorec $AEDC = ACDIG + IDE + AGE$; trojuhelníky ale $IDE \cong AGE \cong ABC \cong CHD$ (dľa 1. poučky shodnosti; uhly sú preto rovné, lebo stoja jích ramená jedno na druhom kolmo.) Označíme-li pre jednoduchosť shodné trojuhelníky skrze *I.*, *II.*, *III.*, a



Obr. 52.

IV., figúru ale $ACDIG$, ktorá medzi trojuhelníkami povstala, skrze *V.*; dostaneme, keď ku figúre *V.* trojuhelníky *I.* a *II.* priložíme, štvorec na hypothenuse, keď ale priložíme k figúre *V.* trojuhelníky *III.* a *IV.*, ktoré sú s predošlými shodné, dostaneme štvorce $ABFG+IFHD$, čili súčeť štvorcov oboch kathét, lebo je $ABFG$ štvorec na malej, $IFHD$ ale na veľkej kathete, poneváč zo shodnosti trojuhelníkov vyplýva, že je $HD=BC=DI$ a $AB=AG$. Poneváč ale rovné miesto rovného dosadené dáva rovné, rovná sa tedy štvorec na hypothenuse súčtu štvorcov na oboch kathetach.

Dôkaz ten píšeme takto:

$ACDIG=ACDIG$

$AGE+EID=ABC+CDH$ spolu

$ACDIG+AGE+EID=ACDIG+ABC+CDH$

čili $ACDE=ABFG+IFHD$

t. j. $ACDE$ štvorec na hypothenuse rovná sa súčtu štvorcov na obov kathetach $ABFG$ a $IFHD$;

alebo kratšie: $V=V$

$I+II=III+IV$ spolu

$V+I+II=V+III+IV$, čo je

$ACDE=ABFG+IFHD.$

Poznam: Vyrežte obrazec 52. vo veľkom na lepenke nakreslený a skladajte z figúry *Va* shodných trojuhelníkov hneď štvorec hypothenusy, hneď zase súčet štvorcov oboch kathet. Tak tiež presvedčíte sa, keď nakreslíte pravouhelník s kathetami 3" a 4" veľkými, hypothenusu ale 5", urobíte štvorce a podelíte ích na štvoročné palce, že je pythagorova poučka pravdivá.

Pomocou pythagorovej poučky možno sostrojiť:

a) štvorec rovný súčtu daných dvoch štvorcov,

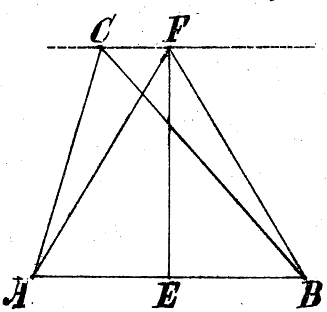
b) štvorec rovný rozdielu daných dvoch štvorcov.

V prvom páde zastupujú strany daných štvorcov kathety, hľadaný štvorec, ktorý sa rovná súčtu oboch daných, je štvorec na hypothenuse, ktorá povstala na udaných kathetach; v druhom páde, vezmeme stranu väčšieho daného štvorca, čo hypothenusu, menšieho ale čo kathetu, sostrojíme z oboch pravouhelník; štvorec na druhej povstalej kathete je onen žiadaný a rovná sa skutočne rozdieľu oboch daných štvorcov.

D) Premienanie prímočiarnych obrázcov.

§. 24.

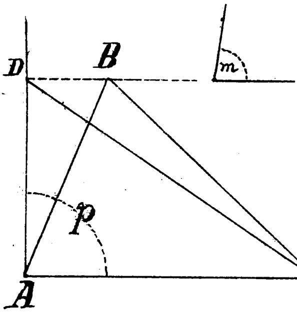
1. Daný trojuhelník ABC (obr. 53.) premeň na rovnorameník. Ťahaj cez C rovnobežnú s AB, polti základnú $AE = EB$; v E postav kolmú, a ťahaj AF a BF. $\triangle\ ABC = AFB$, lebo majú tú istú základnú AB a tú istú výšku $EF = CG$.



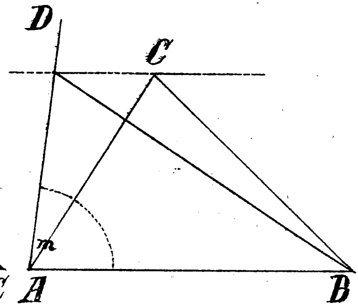
Obr. 53.

2. Daný trojuhelník ABC (obr. 54.) premeň na pravouhelný. Postav v A kolmú AD, cez B ťahaj rovnobežnú DB so základnou, ťahaj DC,

teda je ACD žiadauý pravouhelník rovný danému trojuhelníku.

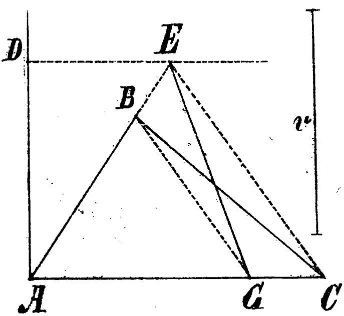


Obr. 54.



Obr. 55.

3. Daný trojuhelník (obr. 55.) premeň na druhý s daným uhlom. Prenes daný uhol m na základnú AB, ťahaj AD, z C ťahaj rovnobežnú so základnou a spoj priesečník D s B, tedy je ABD žiadaný trojuhelník.



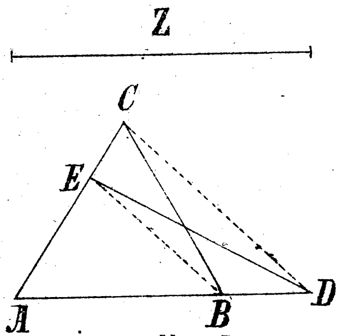
Obr. 56.

4. Daný tvojuhelník ABC (obr. 56.) premeň na trojuhelník s danou výškou (v). Postav v A kolmú $AD = v$, ťahaj DE rovnobežne s AC; predĺž stranu AB do E, ťahaj BG rovnobežne s CE, a spoj E s G, tedy je $\triangle AEG = ABC$, lebo $\triangle GBC = BGE$, poneváč majú tú istú základnú BG, a medzi rovnobežnými ležiaci tú istú výšku. Priložíme-li ku trojuhelníku ABG raz trojuhelník BCG, druhý raz ale jemu rovný BGE, dostaneme v prvom páde pôvodný, v druhom ale jemu rovný trojuhelník so žiadanou výškou.

Príklady: Nakreslite trojuhelník so stranami 4″, 6″, 8″ a premeňte ho:

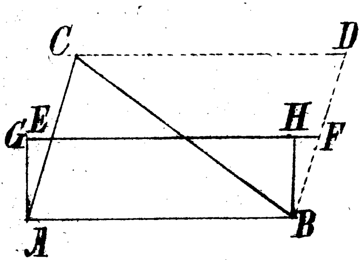
a) na rovnoramený trojuhelník so základnou 5″;
b) na pravouhelník;
c) na trojuhelník s uhlom 58°;
d) na trojuhelník so základnou 7″;
e) na trojuhelník s výškou 5″;
f) na trojuhelník s uhlom 50°, so základnou 3″;
g) na trojuhelník s uhlom 73° a výškou 4.″

5. Daný trojuhelník (obr. 57.) premeň na trojuhelník s danou základnou z. Odmeraj $AD = z$, ťahaj CD, z B ťahaj rovnobežne $BE // DC$ predĺž AC a spoj DE, teda je $\triangle AED = ABC$, lebo sú $\triangle\triangle CDB = CED$, ležiac na tej istej základnej CD a medzi dvoma rovnobežnýma CD a BE.



Obr. 57.

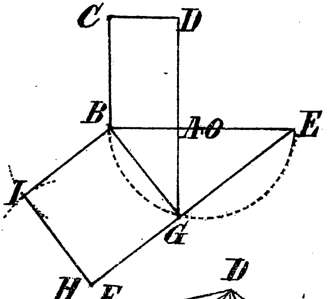
6. Daný trojuhelník (obr. 58.) premeň na rovnobežník a na obdĺžnik. Ťahaj z C rovnobežnú s AB, a z B rovnobežnú s AC, poltí AC v E, a ťahaj $EF // AB$, tedy je $\triangle ABC = AEFB$. Keď postavíme v A kolmú, tak tiež v B, dostaneme obďalník $ABHG = ABC$.



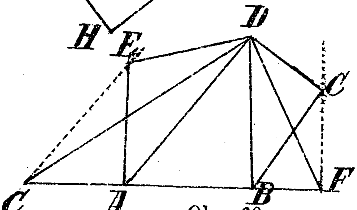
Obr. 58.

7. Obďalník $ABCD$ premeň na štvorec (obr. 59.)

Predĺž stranu AB a AD, a urob $BE = AD$. Poltí BE v O, opíš z O oblúk polmerom OB, priesečník G spoj s E a B, tak bude trojuhelník BGE pravouhelným. Na prímke GB postavený štvorec rovná sa danému obďalníku.



Dôkaz: Ťahaj si pomocné IE a GC, budú $\triangle EBI$ polovica zo štvorca a $\triangle\ GBC$ polovica z obďalníka rovné, bo majú rovné základné a výšky. $EIB \cong GBC$ (2. pád shodnosti). Keď sú ale polovice rovné, tak musia byť aj celky rovné, a tak je $ABCD \cong GBIH$.



Obr. 60.

8. Daný mnohouhelník (obr. 60.) premeň na trojuhelník. Z bodu D ťahaj priečnice AD a BD, ťahaj cez C rovnobežnú s DB, predĺž AB, ťahaj DF; cez E ťahaj rovnobežnú s AD, predĺž AB, spoj DG, teda je DFG žiadaný trojuhelník, rovný danému mnohouhelníku. Dokáž!

Úlohy:

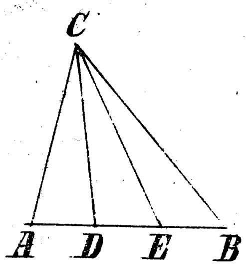
1. Daný rovnobežník premeň:
   a) na obďalník;
   b) na rovnobežník s daným uhlom;
   c) na rovnobežník s danou stranou.
2. Daný lichobežník premeň na trojuhelník.

E) Delenie prímkových obrazcov.

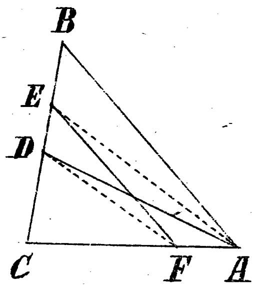
§. 25.

1. Rozdeľ trojuhelník ABC (obr. 61.) z uhlu na dve, tri atď. čiastky. Podeľ základnú na žiadaný počet

čiastok a spoj s protiležiacim uhlom, povstalé kusy sú rovné, lebo majú tú istú výšku a tú istú základnú.

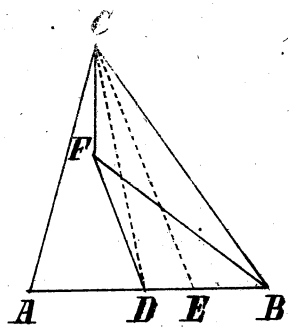


Obr. 61.

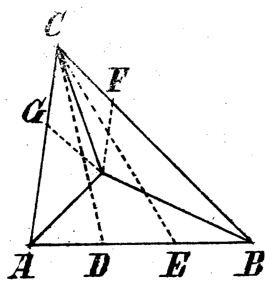


Obr. 62.

2. Rozdeľ trojuhelník (obr. 62.) z daného bodu E na strane, na 2 rovné čiastky. Polti stranu BC v D, ťahaj AE a AD, tedy je $\triangle ABE$ o AED menší než polovica, ťahaj z bodu D $DF // AE$ a EF, tedy je $ABEF = FEC$, lebo sme ku ABE pridali miesto chybujúceho kusu AED jemu rovný AFE.



Obr. 63.

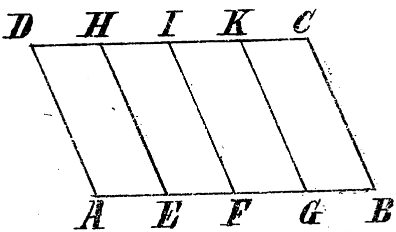


Obr. 64.

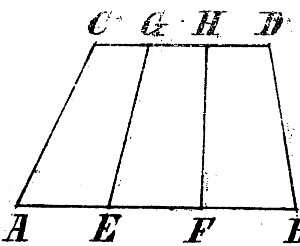
3. Rozdel trojuhelník (obr. 63.) z bodu F, v ňom ležiaceho, na 2 rovné čiastky. Polti AB, ťahaj CD, FD a FC, $EC // FD$, spoj EF a CF, tedy je $AEFC = EBCF$.

4. Rozdeľ trojuhelník (obr. 64.) na tri rovné čiastky tak, že deliace čiary z uhlov vychodia a v spoločnom bode v trojuhelníku sa schádzajú. Rozdeľ stranu AB na 3 rovné čiastky, ťahaj CD a CE, tedy rozpadne sa i trojuhelník na 3 rovné čiastky. Ťahaj $DF//AC$, tak tiež $EG//BC$, spoj bod O s uhlami, a úloha je riešená. Dôkaz?

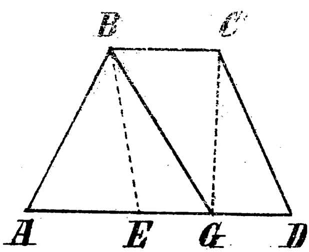
5. Rozdeľ rovnobežník na viac ku pr. na 4 čiastky tak, že deliace prímky s jednou stranou rovnobežne pôjdu. (Obr. 65.)



Obr. 65.



Obr. 66.

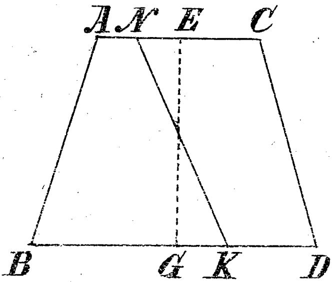


Obr. 67.

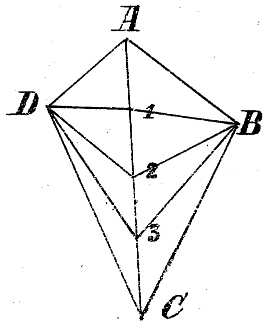
6. Rozdeľ lichobežník na 3 čiastky, tak že deliace prímky rovnobežné strany preseknú. Rozdeľ každú rovnobežnú (obr. 66.) na troje, a spoj povstalé body, tedy je úloha riešená.

7. Rozdeľ lichobežník z uhla (obr. 67.) na 2 rovné čiastky. Prenes menšú rovnobežnú stranu na väčšú, polti zbytok DE a ťahaj BG, teda je $ABC = BCEG$.

8. Polti líchobežník (obr. 68.) z bodu v rovnobežnej strane ležiaceho N. Rovnobežné strany polti obe, urob $GK = EN$, a ťahaj NK, tedy je $ANKB = NCDG$.



Obr. 68.



Obr. 69.

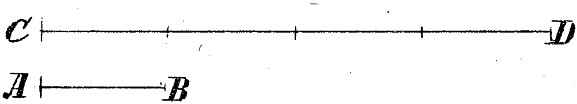
9. Rôznobežník podeľ na ľubovoľný počeť čiastok. (Obr. 69.) Ťahaj priečnicu AC, podeľ ju na žiadaný počeť čiastok a spoj s povstalými bodami oba protivné vrchole, kusy sú $AB1D = 1B2D = 2B3D = 3BCD$.

F) Podobnosť prímkových obrazcov.

Pomery a úmernosti.

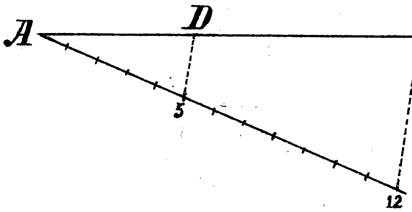
§. 26.

Keď prímka v druhej bez zbytku viac ráz obsažená je, volá sa jej mierou. Porovnáme-li obe tieto prímky, vidíme že je AB v CD (obr. 70.) ku pr. 4 ráz obsažená t. j. ony stoja v pomeru $1:4$.



Obr. 70.

1. Rozdeľ prímku AB (obr. 71.) v danom pomere, ku pr. 5 : 7.



Obr. 71.

Sostrojenie: V A urob ľubovoľný uhel, prenes naň $5+7=12$ rovnak veľkých ľubovoľných kusov, ťahaj prímku 12 B, a cez 5 s ňou rovnobežnú 5 D, tedy bude $AB : DB = 5 : 7$.

Úlohy.

a) Rozdeľ prímku v pomere 4 : 3.

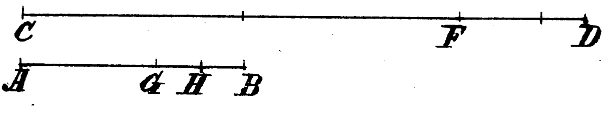
b) Rozdeľ prímku na 4 kusy, ktoré v pomere 3 : 4 : 6 : 9 stoja.

c) Sostroj trojuhelník, ktorého strany v pomere 3 : 5 : 7 stoja.

d) Sostroj rovnoramený trojuhelník, ktorého základná ku výške v pomere 4 : 7 stojí.

2. Určí pomer dvoch prímok.

K určeniu pomeru dvoch prímok vyhladáme najprv spoločnú mieru, a určíme potom, koľkoráz táto v každej prímke obsažená je. Určenie spoločnej miery deje sa nasledovne: menšú prímku AB prenesieme na vätšú, koľkoráz sa dá, zbytok FD prenesieme na prímku AB, zbytok GB zase na predešlý zbytok atď. dokiaľ



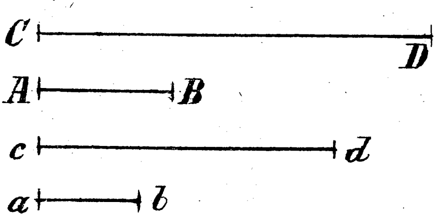
Obr. 72.

kolvek posledný zbytok úplne obsažený nebude. Posledný zbytok je spoločnou mierou. Tak je ku pr. prímka AB v CD (obr. 72.) dvaráz obsažená, a zostal zbytok FD. Tento zbytok obsažený je v prímke AB raz a zostal zbytok GB; GB je v FD obsažené raz a zostane zbytok HD, ktorý je v zbytku GB úplne dvaráz obsažený. HD je tedy spoločnou mierou, ktorú značíme písmenou m.

$$HD = m.$$
$$GB = 2m.$$
$$FD = GB + HD = 2m + m = 3m.$$
$$AB = FD + GB = 3m + 2m = 5m.$$
$$CD = 2AB + FD = 10m + 3m = 13m.$$

Prímky AB a CD stoja tedy v pomere $5:13$, lebo prímka AB má 5, prímka CD 13 spoločných mier m.

Vezmemeli do ohladu dva páry prímok, ktoré v tomže pomeru stoja, ku pr. prímky AB, CD, a ab, cd (obr. 73.) a spojíme oba rovné pomery znakom rovností, dostaneme úmernosť $AB : CD = ab : cd$, čo sa číta prímka AB má sa ku CD tak ako $ab : cd$; t. j. prímky AB a CD stoja v tomže pomere čo prímky ab a cd, v našom páde v pomere $1:3$. A preto hovoríme prímky AB a CD sú s prímkami ab a cd úmerné.



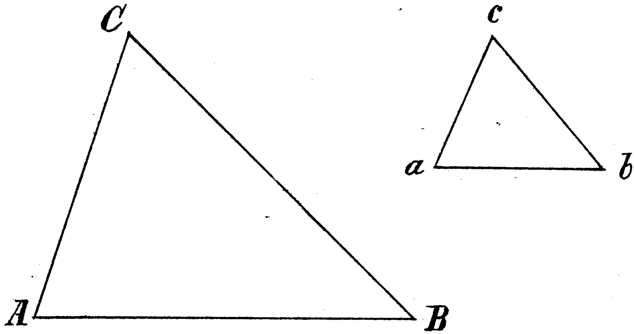
Obr. 37.

Podobnosť trojuhelníkov.

§. 27.

Pri určovaní povrchu, a pri premienaní a delení obrazcov bral sa ohlad jedine na veľkosť bez ohladu na podobu, a preto sme vraveli o rovnosti, a značili to znakom $=$. Také obrazce, ktoré majú rovnak veľký povrch, volajú sa teda rovnými. Keďmajú dva obrazce rovný povrch a rovnakú podobu, volajú sa shodnými, a to sme značili znakom $\cong$. Konečne voláme ale také obrazce, ktoré nemajú tú istú veľkosť, teda rozdielny povrch, ale rovnakú podobu podobnými, a značíme to znakom $\sim$.

Porovnámeli dva trojuhelníky podobné, ku pr. *ABC* a *abc* (obr. 74.), teda najdeme po prvé, že majú všetky uhly obapolne rovné, a po druhé, že sú jích strany úmerné, t. j. že v tom istom pomere všetky stoja.



Obr. 74.

Také trojuhelníky, ktoré majú všetky tri uhly obapolne rovné, a všetky tri strany obapolne úmerné, voláme podobnými, tedy $\triangle ABC \sim abc$.

Toto sa ale stane:

1. Keď v trojuhelníku s niektorou stranou rovnobežnú ťaháme, bude povstalý trojuhelník s pôvodným podobný.

2. Keď dva trojuhelníky obapolne dva uhly rovné majú.

3. Keď majú dve strany úmerné.

4. Keď majú všetky strany obapolne rovnobežné.

5. Keď všetky tri strany v oboch trojuhelníkoch obapolne jedna na druhej kolmo stoja.

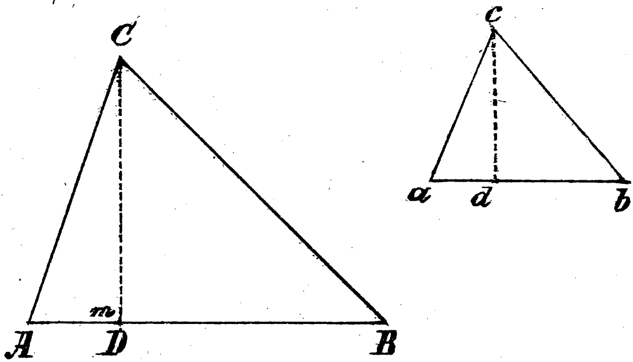
Vlastnosti podobných trojuhelníkov.

§. 28.

1. V podobných trojuhelníkoch stoja výšky v pomere základných.

Trojuhelníky $ABC \backsim abc$ (obrazec 75.), tedy $AB:ab = CD:cd$.

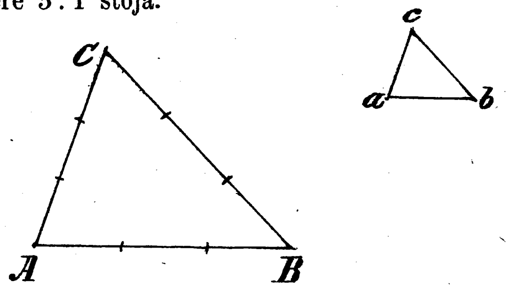
Dôkaz: $AB:ab = AC:ac$, ponevádž sú dané trojuhelníky podobné. Spustímeli z vrcholov výšky, teda budú povstalé trojuhelníky $ACD \backsim acd$, ponevádž uhol pri $A = a$, a uhol $m = n = R$; tedy bude i $AC:ac = CD:cd$, a tak $AB:ab = CD:cd$.



Obr. 75.

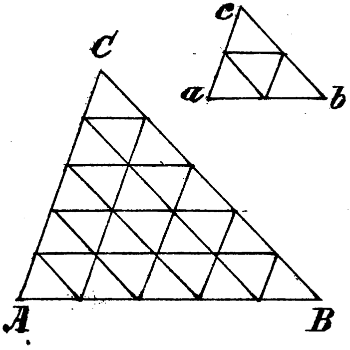
2. V podobných trojuhelníkoch stoja obvody v pomere rovnoľahlých strán. Vezmime dva trojuhelníky ABC a abc, ktorých strany v pomere $3:4$ stoja (obr. 76.), a vidíme, keď tie strany podelíme, že je v skutku každá strana trojuhelníka ABC tri ráz vätšia nežli trojuhelníka abc, z čoho vysvitá, že keď sú jednotlivé strany triráz vätšie, že i jích súčet čili obvod tri ráz

väčší bude, t. j. že i obvody tých trojuhelníkov v pomere 3 : 1 stoja.



Obr. 76.

3. V podobných trojuhelníkoch stoja povrchy v štvorcovom pomere rovnoľahlých strán. Trojuhelník $ABC \backsim DCE$. Vyhľadámeli spoločnú mieru strán, môžeme oba trojuhelníky ťahaním rovnobežníc, ako to obr. 77. ukazuje, na rovné trojuhelníčky podeliť. Trojuhelník ABC má 25, trojuhelník DEC ale 4 také trojuhelníky, tedy stoja jích povrchy v pomere 25 : 4, jích strany stoja ale ako z obrazca vidno v pomere 5 : 2, z čoho štvorce 5×5, a 2×2, pomer 25 : 4 t. j. pomer povrchov dávajú.



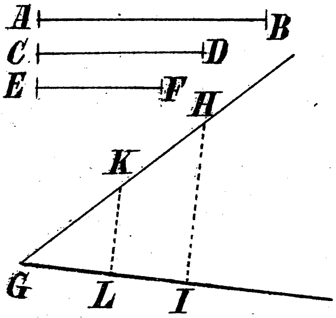
Obr. 77.

Sostrojovačky na podobnosti trojuhelníkov založené.

§. 29.

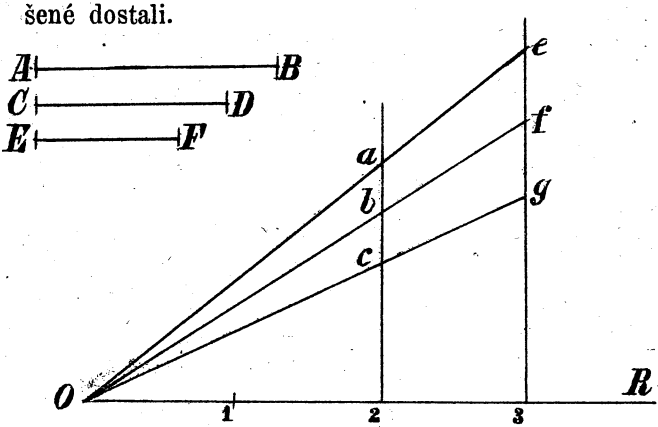
1. Ku trom daným prímkam AB, CD a EF (obr. 78.) hľadaj štvrtú úmernú. Urob ľubovolný uhel LGK,

označ $GH = AB$; $GI = CD$, $GK = EF$, ťahaj IH, a z K rovnobežnú $LK // IK$, tedy je GL štvrtá úmerná, čili $AB : CD = EF : GL$, poneváč sú trojuhelníky $IGH \backsim GLK$.



Obr. 78.

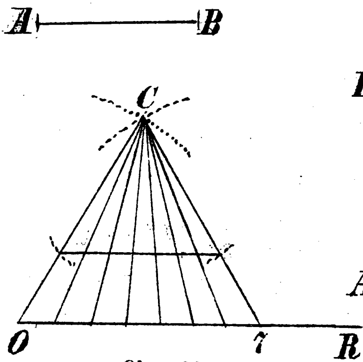
2. Viac prímok AB, CD, EF (obr. 79.) zväčšiť alebo zmenšiť v danom pomere, ku pr. $2 : 3$. Ťahaj prímku OR, a označ na nej tri rovné kusy, postav v 2 a v 3 kolmé, prenes dané prímky na kolmú $a\,2 = AB$, $b\,2 = CD$, $c\,2 = EF$, ťahaj Oa, Ob, Oc a predĺž jích, až kolmú $e\,3$ preseknú, tedy sú $e\,3$, $f\,3$, $g\,3$, v udanom pomere zväčšené prímky. Keď by sme boli dané prímky na kolmej $e\,3$ označili, boli by sme na kolmej $a\,2$ zmenšené dostali.



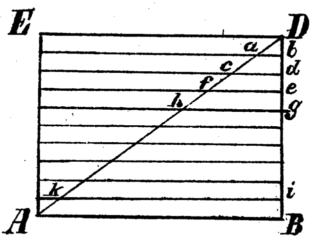
Obr. 79.

3. Rozdeľ prímku AB (obr. 80.) na viac, ku pr. 7 rovných kusov. Ačpráve už jeden spôsob známe, predca je nasledujúci pohodlnejší a dôkladnejší. Vezmi

na prímke OR sedem ľubovolných kusov, postav na prímke $O7$ rovnostranný trojuhelník $O7C$, vezmi AB do kružidla, a označ ho z c na stranách CO a $c7$, tedy je $cD = AB$. Ťahaj prímky $C1$, $C2$, $C3$ atď., tak rozpadne sa daná prímka DE na 7 rovných kusov.



Obr. 80.



Obr. 81.

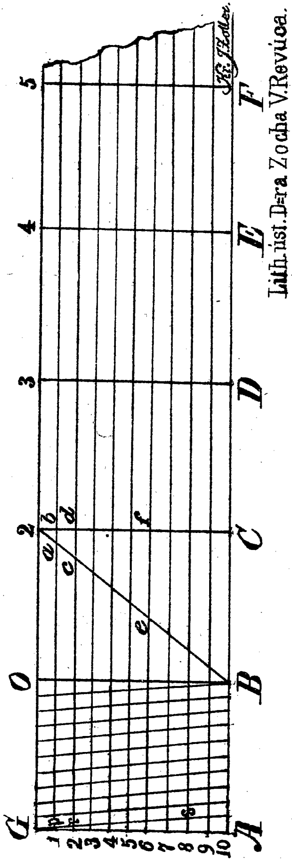
4. Aby sme prímku na veľmi malé čiastky podeliť mohly, upotrebúvame nasledujúci spôsob. Prímka AB (obr. 84.) má sa na 10 čiastok rozdeliť. Postavme v A a B kolmé, označme na ních po 10 rovných ľubovoľných kusov, a spojme jích rovnobežnými s AB, ťahajme priečnu AD, teda je ab jedna, cd dve, fe 3, hg štyry atď. ki devať desatín z AB.

Na tomto zakladá sa tak zvaný zmenšený merťuch, ktorý sa upotrebúva pri kreslení v zmenšenej miere. Tak ku pr. predstavuje obr. 82. polovicu zmenšeného metera, na ktorom: deci-centi- a milimetre merať možno.

AF je pol metra, teda predstavuje $AB =$ decimeter.

Označímeli na kolmej AG 10 rovných ľubovolných čiastok, ťaháme rovnobežné s AF, a priečnicu $B\,100$, tedy je $AB =$ centimeter, cd dva centimetre, ef šesť centimetrov atď. Označíme-li tieto centimetre na GO a AB a ťaháme priečne, bude $1p =$ jeden, $2g$ dva, $3r$

tri, 8 *s* osem atď. millimetrov. Koľko obnáša prímka *FH*? — Odpoveď 2^{dm}, 3^{cm}, 5^{mm}, čili 235^{mm}. Ťahaj si ľubovolné prímky a urči jích veľkosť, vezmúc ích do kružidla na zmenšenom mertuchu. Sostroj trojuhelníky, štvoruhelníky dľa danej miery zmenšeno ku pr. trojuhelník, ktorého strany 316, 521 a 416 millimetrov obnášajú.



Obr. 82.

Pomocou zmenšeného mertucha možno tedy:

1. Zdĺžku na papieri nakreslenej prímky určiť;

2. prímku danej miery nakresliť;

3. danú prímku na viac rovných čiastok rozdeliť;

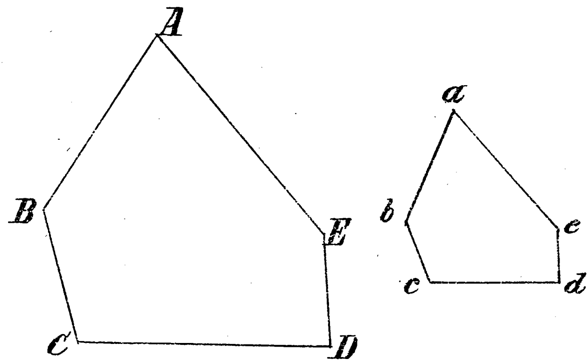
4. pomer dvoch daných prímok určiť.

P o z n a m. Urobte si z bielej lepenky zmenšené mertuchy metrové, a siahové, tieto posledné tak, že možno na ních odmerať stopy a palce, aby ste tak dané úlohy zmenšeno vykresliť, a výkresy dľa miery udať mohli.

Podobnosť mnohouhelníkov.

§. 30.

Dva mnohouhelníky sú podobné, keď majú všetky uhly obapolne rovné, a všetky strany v tom istom poriadku úmerné. Ťahámeli v podobných mnohouhelníkoch z rovného uhla priečnice, rozpadnú sa na rovnak mnoho podobných trojuhelníkov. Ťahané priečnice stoja tedy v pomere rovnoľahlých strán. Tak tiež stoja obvody v pomere strán, povrchy ale v pomere štvorcov rovnoľahlých strán.



Obr. 83.

Úloha: Sostroj mnohouhelník podobný danému $ABCDE$ (obr. 83.) Na ľubovolnej prímke cd označ uhly C a D, hľadaj štvrtu úmernú cb medzi CD, BC a cd, a označ ju, prenes uhol B, hľadaj úmernú ab medzi BC, AB a bc, označ ju, prenes uhol A, a ťahaj ae, tedy je $ABCDE \backsim abcde$.

Nakreslite šesť, sedem atď. uhelník podobný s druhým, tak že jích strany v pomere 3 : 4, 5 : 6 atď. stáť budú.

Nakreslite päťuhelník, ktorého základnia 425^{mm}, na nej ležiace uhly 138^{0} a 116^{0}, obe na základnej stojace strany po 316^{mm}, a na týchto ležiace uhly po 120^{0} mať budú, a urobte k nemu podobný, ktorého základnia 316^{mm} mať bude.

OBSAH.