$\sqrt{a^5 + b^2}$ M.

MERNÍK

pre školu a dom

menovite, pre národ. učiteľov, seminaristov, priemyselníkov, hospodárov a obchodníkov ako i pre priemyselné a opakovacie školy.

$\sqrt{23}$

Obsahuje v sebe:

Základy praktičnej merby, a síce: spôsob kreslenia, vykolkovania a vymeriavania prímych a krivých čiar; spôsob nivellisovania; kreslenie a vymeriavanie uhlov; vlastnosti a sostrojovanie pravidelných a nepravidelných shodných a podobných troj-, štvor-, a viacuhelníkov ako i vymeriavanie ích obvodu a štvorcového obsahu; rozlúštenie niekoľko meričských úloh na shodnosti a podobnosti trojuhelníkov sa zakladajúcich; sostrojovanie zmenšeného merťuchu na základe podobnosti trojuhelníkov; kreslenie a vymeriavanie primočiarnych figúr čili obrázcov dľa zmenšeného merťuchu; vymeriavanie štvorcového obsahu kruhu, kruhového odseku a výseku; vymeriavanie povrchu krychiel či kociek prisiem, pyramíd a pyramídnej kypty, potom válca, kužla, kuželovej kypty a gule, guľového odseku a výseku; vymeriavanie kubičného obsahu: pravouhlastých, válcovitých, kuželovitých a guľatých telies; vypočítanie váhy telies z ích kubičného obsahu a pomernej váhy; vymeriavanie pltného a klátového dreva atď. všetko na základe názoru a početných z praktického života vzatých úloh.

$a^2 + b^2$ $\sqrt{31} =$

Napísal

Gustáv Kordoš.

So 185 drevorezmi.

V RUŽOMBERKU.

TLAČOU A NÁKLADOM KNÍHTLAČIARNE KARLA SALVU.

Tlačou a nákladom kníhtlačiarne Karla Salvu, 1893.

ÚVOD.

O pochope a vlastnosťach telies, plôch, čiar a bodu.

Človek pozoruje doma a v prírode rozličné veci či predmety. Tak n. pr. doma pozorujeme rozličné náradie, ako je: stôl, stolička, oblok, dvere atď., v zahrade: rozličné stromy, ovocie, lísťa, ploty atď., v dedine: vážu, kostol, domy atď., na zemi: mestá, dediny, lesy atď., nad zemou, vo vesmíre: mesiac, slnce, hviezdy.

Všetky tieto veci či predmety, ktoré doma a v prírode vôkol nás pozorujeme, menujeme jednorekom *telesami.* Dľa tohoto: stôl je teleso, oblok je teleso a vôbec každá vec je teleso.

Na zemi nalezajúce sa telesá menujeme *zemskými* a na nebi vo vesmíre nalezajúce sa zas nebeskými či *svetovými* telesami.

Otázky. Ktoré telesá pozorujeme v škole? a v kostole? — ktoré v potoku? v lese? v sklepe? menuj ich!

Pozorovanie vecí či predmetov deje sa smyslami či zrakom, sluchom, chmatom, čichom a šmakom. Poneváč veci či predmety smyslami možno pozorovať, preto menujeme ich *smyselnými* či *fysičnými* telesami. Dľa tohoto každá smyslami pozorovaná vec, predstavuje smyselné či fysičné teleso. Mnohé z týchto smyselných či fysičných telies, ako n. pr. jablko, strom, kremeň, nachodia sa v svojom pôvodnom či prirodzenom stave, iné zas ako n. pr. plot, dom, motyka, predstavujú už umelecké výrobky. A preto tamtie menujeme *prirodzenými* telesami a tieto zas *umeleckými* výrobkami.

Otázky. Ktoré veci či telesá pozorujeme zrakom? ktoré chmatom? ktoré šmakom? ktoré ňuchom? a ktoré sluchom? *Prečo* menujeme veci či predmety prírody *smyselnými* telesami? *Ktoré* z telies nachodia sa v svojom prirodzenom stave? *Ktoré* predstavujú umelecké výrobky?

Považime-li telesá prírody bližšie, zkúsime, že majú rozličné vlastnosti. Tak n. pr. považime-li soľný kruch, zkúsime, že pozostáva z kamenitej hmoty; že sa dá krušiť či že je krušivý, že sa vo vode rozpustí či že je rozpustný; že má zvláštnu slanú chuť; že je čo do barvy biely alebo sivý alebo zelený; že má len náhodnú a nepravidelnú formu či podobu atď.

Považime-li podobne, jablko, zkúsime, že pozostáva z mäsitej hmoty; že sa dá krájať či že je krájavé; že má nakyslastú alebo sladkú chuť či že je nakyslé alebo sladké; že je čo do barvy zelené, žlté alebo červené; že má zvláštnu guľatú formu či podobu atď.

Niektoré z týchto vlastností soli nachodia sa len u soli, a niektoré z týchto vlastností jablka, nachodia sa len u jablka. Ako soľ tak i jablko, každé o sebe, majú svoju zvláštnu chuť, po ktorej ich poznávame. Chuť soli je zvláštna slaná a chuť jablka nakyslavá.

Vlastnosti, ktoré len u patričného telesa nachodia sa, ktoré sú len jemu vlastné, po ktorých ho poznávame a od druhých telies rozoznávame, menujeme *osobitnými* či *zvláštnymi* vlastnosťami. Dľa tohoto osobitná či zvláštna vlastnosť soľného kruchu či soli zvánovky je jej zvláštna slaná, a jablka zas jeho nakyslavá chuť.

Otázky. Čím vyznačuje sa zlato? (zvláštnou žltou barvou) — a diamant? (veľkou tvrdosťou). — Po čom poznávame ružu? (po zvláštnej vôni). — Udaj osobitnú či zvláštnu vlastnosť: skla? hliny? dreva?

Každé teleso pozostáva z nejakej hmoty, ktorá tvorí jeho podstatu. A poneváč táto hmota, z ktorej telesá pozostávajú, je u rozdielnych telies rozdielna, preto sú i ich zvláštne či osobitné vlastnosti rozdielne. Keďže ale zvláštne či osobitné vlastnosti telies od ich podstaty závisia, preto tieto vlastnosti i *podstatnými* vlastnosťami možno pomenovať. Dľa tohoto *podstatná* vlastnosť soľného kruchu je jeho slaná a jablka zas jeho nakyslavá chuť.

Otázky. Z akej hmoty pozostáva: nôž? kľúč? (z kovovej) — kniha? (z papierovej) — stôl, stolička? (z drevenej) — pohár? fľaša? (zo sklennej) atď.

Ako solný kruch tak i jablko majú istú formu či podobu, čo menujeme *tvarom*. Tvar soľného kruchu je nepravidelný a len náhodný, tvar či forma jablka je guľatá, stála. Podobne má i každé iné smyselné teleso svoju formu či svoj tvar, už či pravidelný či nepravidelný, už či stály a či náhodný, a preto je *tvar* či *forma* alebo podoba *všeobecná* či spoločná vlastnosť telies.

Otázky. Akú podobu má obločná tabla? (Odp. Štvoruhlastú) a ihla? (Odp. Končitú) a orech? a dom?

Konečne, ako soľný kruch tak i jablko majú istú veľkosť a preto zaujímajú istý priestor. Čím väčšie je nejaké jablko alebo nejaký soľný kruch, tým väčší je i nimi zaujatý priestor. Najlepší príklad zo všetkých strán uzavretého priestoru podáva nám nejaká izba. O veľkej izbe totiž hovoríme, že je priestranná, že zaujíma veľký priestor. Podobne o nádobách, do ktorých sa mnoho vleje, hovoríme, že sú priestranné. Malé nádoby zaujímajú malý priestor, veľké zas veľký priestor. V izbovom či izbou zaujatom priestore nalezá sa domáce náradie, ako n. pr. stôl, stolička, posteľ atď. Každé z týchto telies zaujíma istú časť z izbového priestoru, bo každé z nich má istú veľkosť. Podobne zaujíma každá miestnosť domu, ako n. pr. pivnica, komora, izba, kuchyňa, pôjd, maštal istú časť z domového či domom zaujatého priestoru. Taktiež dediny, mestá, lesy zaujímajú istú časť z prízemského a slnce, mesiac, hviezdy ale istú časť z nadzemského či z nekonečného vesmírového priestoru.

Poneváč každé teleso, i ten najmenší prášok, má istú veľkosť a rozprestiera sa v priestore, preto je *rozprestranivosť* tiež všeobecná vlastnosť telies.

Otázky. Ktoré telesá rozprestierajú sa v pivničnom priestore? a v kostolnom priestore?

Posledné dve všeobecné vlastnosti telies, t. j. tvar či podoba a veľkosť telies sú predmetom takzvanej *merby* či *geometrie.* Merba zaoberá sa len s tvarom či podobou a veľkosťou telies. A preto, keď takzvaný zememerač (geometra) alebo merič (ingenieur) nejaké teleso vymeriava, nezpytuje sa: či je ono drevené? alebo kovové? lež len koľký je ním zaujatý priestor a akú má formu či podobu. Tak na pr., keď vymeriava dosku, tejto veľkosť, nepozerá na to, či je táže buková alebo jalová, suchá alebo mokrá atď., lež len aký má tvar a koľký je ňou zaujatý priestor. Keďže ale zememerač alebo merič pri vymeriavaní na hmotu telesa sa neobzerá, a len jeho veľkosť a podobu do povahy berie, preto jeho teleso má len dve vlastnosti, a síce tvar a veľkosť. Tohotos pôsobu telesá, menujeme *geometrickými* telesami.. Pravdaže takýchto telies, ktoré by len tvar a veľkosť maly, t. j. vzduchoprázdny ohraničený priestor predstavovaly, v prírode nieto. Takéto telesá možno si len v mysli predstaviť a vyobraziť, čo veľmi snadno prevedieme, jestli u nejakého smyselného telesa od jeho hmoty odhliadneme a len jeho tvar a veľkosť v mysli podržíme. Tak n. pr. doske zodpovedajúce geometrické teleso obdržíme, jestli od jej hmoty cele odhliadneme a len ňou zaujatý priestor a podobu v mysli podržíme.

Poneváč každé smyselné teleso krem svojich ostatných vlastností, má i veľkosť a podobu, preto je každé smyselné teleso súčasne i geometrickým telesom, a síce svojej veľkosti a podobe zodpovedajúcim. Tak n. pr. školská tabula predstavuje súčasne nielen smyselné, lež i geometrické teleso, tej veľkosti a podoby, ako je ona sama. Chce-li tedy zememerač alebo merič nejakú tabulu vymerať, netreba mu jej zodpovedajúce geometrické teleso o sebe, čo priam i len v mysli sostrojovať, smyselná tabuľa zobrazuje jej zodpovedajúceho geometrického telesa i veľkosť i podobu. A preto veľkosť alebo podobu tabule vymeriavame na skutočnej smyselnej tabuli, podobne veľkosť alebo podobu pece, na skutočnej peci atď.

Otázky. *Len* ktoré vlastnosti má geometrické teleso? — *Aký* je rozdiel medzi smyselným a medzi geometrickým telesom? — *Prečo* geometrické teleso nemožno smyslami pozorovať? — *Ktoré* telesá sú predmetom merby? — *Ktoré* vlastnosti sú smyselným a geometrickým telesám spoločné? — Čo je vlastne geometrické teleso? (Vzduchoprázdny priestor istej veľkosti a podoby.)

U tabule a vôbec u každého telesa pozorujeme, že sa od prava v ľavo, od predu na zad a od vrchu na dol, či v troch smeroch rozprestiera. Jeden z týchto smerov, a síce od prava v ľavo alebo naopak menujeme *dĺžkou*; druhý, a síce od predu na zad, alebo naopak *šírkou*, a tretí od vrchu na dol alebo naopak *výškou*. Dĺžka, šírka a výška sú takzvané *rozmery* telies. Dľa tohoto, každé teleso má tri rozmery. Miesto slova vysoký užíva sa často to slovo *tenký* alebo *hrubý*. Tak n. pr. u dosky hovoríme, že je široká, dlhá a hrubá alebo tenká. Áno, u studni a u nádob upotrebujeme miesto vysoký to slovo hlboký.

Otázky. *Čo* rozumieme pod rozmerami telies? (Dĺžku, výšku a šírku). — *Ukiaž* všetky tri rozmery pece alebo tabule? — *Či* i tenký papier má tri rozmery? — *Má-li* drevená tabuľa a jej zodpovedajúce geometrické teleso rovnoveľké a či nerovnoveľké rozmery? — *Koľko* rozmerov má tedy i každé geometrické teleso? — *V čom* srovnávajú sa ešte tedy geometrické telesá so smyselnými? (V počte rozmerov; každé má tri rozmery). — *Ktorý* z týchto troch rozmerov je u pltného dreva najväčší? — *U ktorého* telesa sú všetky tri rozmery rovnaké? — *U ktorého* telesa sú dva rozmery rovnaké a tretí väčší alebo menší? — *Ktorý* rozmer menujeme hĺbkou a ktorý hrúbkou?

Pri pozorovaní rozmerov u telies napadne nám, že ani jedno vo svojich rozmeroch do nekonečnosti sa nerozprestiera či že ani jedno nenie ani nekonečne dlhé, ani nekonečne široké, ani nekonečne vysoké. Každé teleso rozprestiera sa len po isté hranice, je tedy ohraničené. Tieto hranice telies sú takzvané plochy. Pod plochou rozumieme tedy tie najzovnútornejšie miesta telesa, kde sa tože už prestáva rozprestierať. Ako počet, tak i podoba hraničných plôch je u rozličných telies, rozdielna. Tak na pr. školská tabuľa alebo tehla má šesť hraničných plôch; a síce jednu hore na vrchu a druhú dolu na spodku, jednu na pravom a druhú na ľavom boku, jednu na prednej a druhú na zadnej strane. Všetky tieto plochy sú u tabule alebo u tehly rovné. Krem rovných plôch pozorujeme u telies ešte i krivé plochy. Tak na pr. jablko ohraničené je krivou plochou.

Poneváč plochy nie sú čiastky, lež len vonkajšie či najzovnútornejšie miesta telies, kde sa tieto prestávajú rozprestierať, preto každá plocha má len dva rozmery a síce: dĺžku a šírku. Plocha je len dlhá a široká a nič hrubá. A preto odštiepime-li z nejakého telesa čo ako tenkú vrstvičku, neobdržíme plochu ale teleso, bo akokoľvek tenká lupinka má už i svoju hrúbku.

Veľmi dobrý obraz opravdovej či takzvanej geometrickej plochy podáva nám na pr. roľa alebo zahrada. Ako roľa tak i zahrada sú totiž len dlhé a široké a nič vysoké, majú tedy len dva rozmery. Ešte lepší príklad opravdovej či geometrickej plochy podáva nám tieň či stín nejakého telesa.

Poneváč plocha má len dva rozmery, t. j. šírku a dĺžku, preto, koľkokoľvek plôch jednu na druhú položíme, vždy len plochu obdržíme.

Otázky a úlohy. *Ukiaž* hraničné plochy stola! tabule! izby! — *Koľkoraké* hraničné plochy pozorujeme na válci? — *Koľko* hraničných plôch má vajce? — *Aká* je hraničná plocha gule? rovná-li a či krivá? — *Aké* plochy pozorujeme na ľudskom tele? a na doske?

Kde sa dve susedné plochy tabule alebo tehly stýkajú, povstáva takzvaná hrana či čiara. Ako tabuľa tak i tehla má dvanásť hrán: hore štyri, dolu štyri a zôkol vôkol štyri. Hrany či čiary sú hranice plôch.

Opravdová či takzvaná geometrická čiara má len jeden rozmer, a síce dĺžku, ona je len dlhá, nič vysoká a nič široká. Geometrickú čiaru možno si len v mysli predstaviť. Dobrý príklad geometrickej čiary podáva nám papier na svojom záhybe. A preto kriedou na tabuli alebo tužkou na papieri čo ako tenko urobené čiary, sú len smyselné znaky či smyselné obrazy opravdových geometrických čiar; bo ako kriedou na tabuli tak i tužkou na papieri urobené čiary majú nie len dĺžku ale i šírku a výšku a preto sú telesá.

Keďže ale geometrická čiara má len jeden rozmer a síce dĺžku, preto koľkokoľvek takýchto čiar jednu na druhú položíme, vždy len čiaru obdržíme.

Poneváč ale geometrické čiary v skutočnosti nejestvujú, preto vymeriava zememerač alebo merič dĺžku svojich geometrických čiar vždy na smyselných čiarach, pričom neberie ohľad ani na ich šírku, ani na ich výšku.

Otázky a úlohy. *Ukiaž* hraničné čiary u tabule! koľko rozmerov má geometrická čiara? — *Na ktorom* telese spatrujeme krivé hraničné čiary? — *Koľko* hraničných čiar má válec? a krajciar?

Kde sa hrany (čiary) tabule alebo tehly dovedna stýkajú, povstáva roh či bod. Body sú hranice čiar. Opravdový či tak zvaný mathematický bod nemá žiadnych rozmerov. Mathematický bod je nič dlhý, nič vysoký a nič široký. A preto tužkou na papieri alebo kriedou na tabuli urobené body, sú len smyselné znaky mathematických bodov. Každý takýto, kriedou na tabuli alebo tužkou na papieri urobený bod má tri rozmery, kdežto mathematický bod, ako sme už riekli, nemá žiadnych rozmerov. Tento posledný možno si len v mysli predstaviť, smyselne vyobraziť ho nenie možno. Pod kriedou urobeným bodom rozumie zememerač alebo merič vždy len mathematický bod.

Mathematický bod nenie čiastka, len hranica čiary, a preto, koľkokoľvek takýchto bodov jeden k druhému alebo jeden na druhý položíme, vždy len bod, a nie čiaru, obdržíme. Na tabuli alebo tehle nachodí sa takýchto hraničných bodov (rohov) osem, hore štyri a dolu štyri.

Na tabuli označujeme body kriedou, na papieri tužkou alebo černidlom, a na zemi týčkou alebo kolom, zástavkami a signálami. Na vrchoch pyramidami z dreva alebo kameňa urobenými. Takéto na zemi alebo na papieri označené body, lišia sa jeden od druhého len čo do polohy. Tak na pr. dva alebo tri body môžu ležať alebo jeden pri druhom, alebo jeden nad druhým atď.

Na mappách či zemevidoch označujeme miesta: dedín a miest, tiež bodami a ich vzájomnú polohu určujeme a vyslovujeme dľa strán sveta, Tak na pr. hovoríme, že mesto *A* leží východne od mesta *B*, alebo dedina *C* leží južne od dediny *D* atď.

Otázky. *Koľko* rozmerov má mathematický bod? a geometrická čiara? a geometrická plocha? a geometrické teleso? — *Koľko* hraničných bodov má rovná čiara? — *Koľko* hraničných bodov pozorujeme na válci? — *Čo* rozumieme pod východným? čo pod západným? čo pod poludním či južným? a čo pod severným bodom strán sveta?

Zo všetkého dosiaľ povedaného vyplýva, že ako telesá, tak i plochy a čiary len v priestore nalezajú sa a že si ich len v priestore možno predstaviť a vyobraziť. Pre túto ich spoločnú vlastnosť, menujeme: telesá, plochy a čiary *priestorovými* veličinami. A poneváč ako telesá tak i plochy a čiary sú predmetom merby, preto je merba či geometria tá veda, ktorá sa s priestorovými veličinami zaoberá. (Predmetom počtovedy sú jedna od druhej oddelené a preto číselné veličiny; priestorové veličiny meriame a číselné čítame).

Na základe tohoto môžme merbu na tri čiastky rozdeliť:

a) na *čiaromerbu* (longimetriu)
b) na *plochomerbu* (planimetriu)
c) na *telesomerbu* (stereometriu).

Časť prvá.

Čiaromerba (Longimetria).

§ 1. O čiarach a ich rozličnej povahe.

Ako známo, na tabuli čiara povstane, jestli na nej kriedou čiarame t. j. jestli túto postupne a tak pohybujeme, že patrné znaky či stopy svojej cesty po sebe zanechá. Túto patrnými znakmi označenú cestu kriedy menujeme *čiarou*. Dľa tohoto na tabuli povstalá čiara nenie iné, ako postupne pohybovavšej sa kriedy patrnými znakmi znázornená cesta.

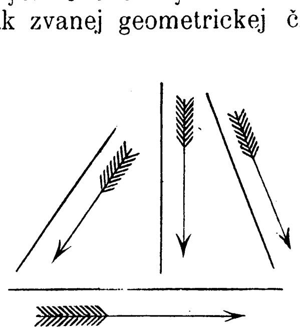
Podobne i na papieri čiaru obdržíme, jestli tužku alebo pero po ňom postupne pohybujeme.

Taktiež čiaru, čo priam smyselnými znakmi neoznačenú, obdržíme, jestli kameň do povetria vyhodíme alebo guľu z flinty vystrelíme.

Každé postupne pohybujúce sa teleso opíše počas svojho pohybu čiaru, čo priam smyselnými znakmi neoznačenú.

Zo všetkého tu povedaného vyplýva, že *čiara povstane, jestli nejaké teleso postupne v priestore sa pohybuje,* či že *čiary sú postupne v priestore pohybovavšími sa telesami opísané cesty.*

Pravdaže každá pohybovaním sa smyselného čili fysičného telesa povstalá čiara je len smyselný obraz tak zvanej geometrickej čiary, bo každá pohybovaním sa smyselného čili fysičného telesa povstalá čiara má, ako to už známe, tri rozmery, a síce, dĺžku, šírku a výšku, kdežto tak zvaná geometrická čiara má len jeden rozmer a síce dĺžku. A preto na mieste takto či pohybovaním sa smyselného telesa povstalých smyselných čiar musíme si vždy myslieť im zodpovedajúce geometrické.



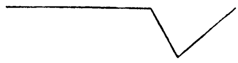
Obr. 1.

Čiarame-li kriedou na tabuli od ľava v pravo alebo od hora na dol, alebo od dola na hor v pravo, alebo od hora na dol v ľavo, avšak vždy *v jednom a tom istom smere* či *priamo*, obdržíme tak zvanú *priamu* či *prímu* čiaru, alebo nakrátce *prímku. Obr. 1.*

Už z tohoto spôsobu čiarania vysvitá, že príma čiara či prímka má len jeden smer. Ako krieda, podobne opíše i každé iné v jednom a tom istom smere pohybujúce sa teleso počas svojho pohybu prímej čiare či prímke podobnú cestu. Takto či v jednom a tom istom smere pohybuje sa na pr. voľno na zem pustený kameň, a preto je ním opísaná cesta či čiara *prímka.*

Prímu čiaru či prímku znázorňuje: rovná palica, do tuha vystretá šnúra alebo žinka atď.

Pohybujeme-li na tabuli kriedu vo viac než v jednom smere, na pr. najprv od ľava v pravo, potom od ľava v pravo a na hor, potom od hora v pravo a na dol, opíše táto tak zvanej *lomenej* čiare podobnú cestu. *Obr. 2.* Každá takáto čili lomená čiara skladá sa z dvoch alebo viac prímok a preto má najmieň dva smery.



Obr. 2.

Keď sa tedy nejaké teleso v dvoch, v troch alebo vo viac smeroch postupne pohybuje, opíše lomenej čiare podobnú cestu. Dobrý príklad takto či vo viac smeroch pohybujúceho sa telesa podáva nám z jednej do druhej ulice prechodiaci človek. Ním opísaná cesta podobá sa *klikatej* či lomenej čiare. Taktiež lomenú čiaru zobrazuje: nalomená palica, motyka, sekera atď.

Pohybujeme-li na tabuli kriedu tak, že sa jej smer ustavične mení, opíše táže cestu tak zvanej *krivej* čiare podobnú. *Obr. 3.* Každá týmto spôsobom povstalá čiara má nesčíselne mnoho smerov.

Obr. 3

Ako krieda, podobne opíše i každé iné počas svojho postupného pohybu svoj smer ustavične meniace teleso krivej čiare podobnú cestu. Dobrý príklad takéhoto, počas svojho pohybu svoj smer ustavične meniaceho telesa, podáva v mangli *ťahajúci kôň.* Krivú čiaru zobrazujú na pr. kolesové bahry, po zemi plaziaci sa had atď.

Konečne nejaké teleso môže sa premieňavo, hneď v prímej, hneď zas v krivej čiare pohybovať. Týmto spôsobom pohybujúce sa teleso opíše cestu, ktorá sa zčiastky prímej, zčiastky ale krivej čiare podobá. Takúto t. j. z prímych a krivých čiar skladajúcu sa čiaru menujeme *miešanou* čiarou. *Obr. 4.* Miešanú čiaru zobrazuje na pr. kosák alebo kosiskom opatrená kosa, pastierska palica atď.

Obr. 4.

Zo všetkého posledne povedaného vyplýva, že pohybujúcim sa telesom opísané cesty môžu byť: príme, lomené, krivé a miešané a že dľa tohoto i čiary sú štvoraké: *príme, lomené, krivé a miešané*

Úlohy. 1. Nakresli kriedou na tabuli alebo tužkou na papieri smer prímky ukazujúce šípy: na pr. od ľava v pravo a na hor! — od ľava v pravo a na dol! — od prava v ľavo a na dol! (ako na *Obr. 1.*) a potom v týchto smeroch idúce prímky.

Koľko smerov má každá prímka? *Kedy* opíše postupne pohybujúce sa teleso prímke podobnú cestu?

2. Čiaraj na tabuli kriedou, jedno po druhom: v dvoch! — v troch! — v štyroch! jeden od druhého rozdielnych smeroch! — *Aké* sú povstalé čiary?

Koľko smerov má prvá! druhá! tretia! z povstalých čiar? Z jakých čiar pozostáva lomená čiara?

Najmieň koľko smerov má lomená čiara?

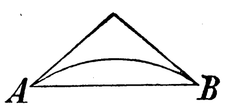
3. Znázorni kriedou na tabuli cestu na kolkárni pohybujúcej sa gule, keď ide hore bubnom! *Akú* čiaru opisuje hore bubnom pohybujúca sa guľa? — *Koľko* smerov má krivá čiara? — *V koľkých* smeroch pohybuje sa kolo nejakého stromu obehujúci človek?

4. *Vyobraz* kriedou na tabuli cestu, na kolkárni na prvého vyhodenej a súčasne hore bubnom vybehnuvšej gule!

Akú čiaru zobrazuje cesta tejto gule?

§ 2. O prímej čiare či prímke.

Nakreslíme na tabuli dva body na pr. bod A a bod B a spojme oba: prímou, lomenou a krivou čiarou. *Obr. 5.* Pohybujeme-li bod A k bodu B najprv v prímej, potom v lomenej, konečne v krivej čiare, vždy rovnakou rýchlosťou, zkúsime, že tamtá prvá cesta či v smere prímej čiary je najkratšia. Z tohoto vyplýva, že *medzi dvoma body najkratšia čiara je prímka.* A preto k nejakému predmetu najrýchlejšie dojdeme, jestli priamo či v prímej čiare sa k nemu pohybujeme.



Obr. 5.

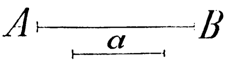
Poneváč ale prímka má len jeden smer, preto medzi dvoma body, na pr. A a B, len jednu prímku možno načiarať. Keďže ale medzi dvoma body je len jedna prímka možná, preto i najkratšia diaľka medzi nimi môže tiež len jedna byť.

Túto najkratšiu diaľku dvoch bodov alebo dvoch predmetov jednoho od druhého menujeme *priamou* či *rovnou* diaľkou.

Pre tieto svoje vlastnosti slúži príma čiara či prímka k určeniu priamej či rovnej diaľky dvoch bodov jednoho od druhého. Tak na pr bod A leží od bodu B *(Obr. 5.)* tak ďaleko, koľká je medzi oboma načiaraná prímka AB.

A preto *rovnú či priamu diaľku dvoch predmetov jednoho od druhého najdeme, jestli medzi oboma prímku načiarame alebo vyznamenáme a túto potom vymeriame.*

Prímku označujeme dvoma alebo i len jednou literou. Pri označení dvoma literami píšeme jednu z litier pred jej začiatočný, a druhú za jej konečný bod a vyslovujeme obe jednu po druhej na pr. prímka *AB (Obr. 6.)*. Pri označení jednou literou, píšeme túto vo stredu prímky na ňu.

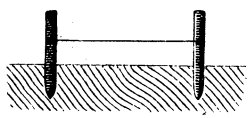


Obr. 6.

Na tabuli alebo papieri čiarame prímky alebo svobodnou rukou, dľa oka, alebo pomocou linonára. Máme-li dva body *A* a *B* prímkou dovedna spojiť, priložíme k obom jeden alebo druhý bok linonára a čiarame pozdĺž neho, dľa potreby, kriedou alebo tužkou alebo perom. Takto načiaraná čiara je však len vtedy opravdová prímka, jestli otázny bok linonára, pozdĺž nehož sme čiarali, je prímy. Sú-li upotrebeného linonára boky opravdu príme, o tom tak sa presvedčíme, jestli po načiaraní čiary linonár čím hore tým dolu obrátime a potom ten istý bok linonára, pozdĺž nehož sme čiarali, k načiaranej čiare priložíme. Spaduje-li bok linonára s čiarou na vlas dovedna, tedy je linonár, poťažne otázny jeho bok prímy či rovný, v odpornom páde ale neprímy či nerovný.

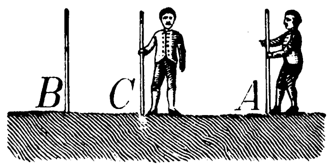
Tesári či kresári označujú prímu čiaru na dreve šnúrou, ktorú prv do červenej alebo čiernej barvy zamočia a potom pozdĺž dreva do tuha vystrú. Tretia osoba zdvihne vystretú šnúru v jej stredu do hora a pustí na to voľno. Pustená šnúra otlačí pozdĺž dreva červenú alebo čiernu prímu čiaru, dľa ktorej potom krešú.

V zahradách a na poli vyznamenávame príme čiary šnúrou, na dvoch kolkoch navinutou. *(Obr. 7.)*. Tento prístroj k vyznamenaniu prímych čiar na svobode, možno však len vtedy upotrebiť, jestli vyznamenať sa majúca prímka nenie príliš dlhá.


Obr. 7.

K vyznamenaniu alebo označeniu dlhých prímok upotrebujeme tri, na chlapa vysoké drúčky, ktoré na jednom zo svojich koncov sú zaostrené. Jeden z týchto drúčkov zabodneme kolmo do zeme v začiatočnom *A* a druhý v konečnom bode *B* vyznamenať sa majúcej prímky. Na to staneme si pred začiatočný drúček *A*, pár krokov od neho a obrátiac sa k nemu tvárou, visírujeme t. j. pozeráme cezeň na druhý či v bode *B* zabodnutý tak, že sa oba kryjú či že oba stoja v jednom a tom istom smere. Na to — podržiac naše stanovisko — kážeme druhej osobe, medzi oba prvé drúčky zabodnúť tretí *C* drúček, tak, že i tento bude stáť v tom istom smere, ako predošlé, či že prvý drúček *A* zakrýva oku nášmu nie len konečný v *B*, lež i ten tretí v *C* zabodnutý. *Obr. 8.* Takto zabodnuté drúčky stoja potom v jednom smere a preto označujú prímu čiaru.

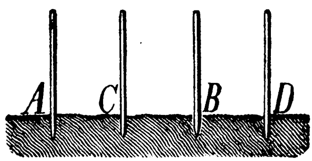
Nezabodla-li tá druhá osoba odrazu svoj drúček do visírovanej prímej čiary dáme jej znak rukou dľa potreby. Tak na príklad má-li ho zabodnúť máličko ďalej v ľavo, kývneme jej ľavou rukou v ľavo; má-li ho zabodnúť máličko ďalej v pravo, kývneme jej pravou kruou v pravo či od seba. Takto či kolkami prímu čiaru označiť, znamená ju *vykolkovať*.



Obr. 8.

Je-li vykolkovať sa majúca prímka pridlhá, upotrebíme k jej vykolkovaniu viac než tri drúčky. Avšak i v tomto prípade zabodneme najprv jeden v začiatočnom a druhý v konečnom bode vykolkovať sa majúcej prímky a ostatné potom medzi tieto tak, že prvý zakrýva oku nášmu nie len posledný, ale i všetky ostatné, medzi prvým a konečným drúčkom sa nalezajúce.

Treba-li nejakú už vykolkovanú čiaru *predlžiť*, postavíme sa ako prv pred druhý drúček a kážeme druhej osobe za posledný či za v konečnom bode sa nalezajúci drúček jeden alebo viac drúčkov postaviť, na pr. v bode *D*, pri čom zas dáme jej dľa potreby znak rukou a pozorujeme k tomu, aby prvý drúček, pred ktorým stojíme, nie len posledný a predposledné, ale i všetky za posledným sa nalezajúce oku nášmu cele zakryl. *Obr. 9.*



Obr. 9.

Úlohy. 1. Nakresli na tabuli alebo na papieri dva body *A* a *B*, a spoj oba, upotrebením linonára, prímkou.

Koľko prímok možno medzi dvoma body, na pr. medzi *A* a *B* načiarať? — *Ktorú* diaľku znamená medzi dvoma predmety vyznačená prímka? — Čo rozumieme pod priamou či rovnou diaľkou dvoch miest jednoho od druhého? — Jestli medzi dvoma obcami nachodia sa tri cesty, jedna krivej, druhá lomenej a tretia prímej čiare podobná, ktorá z nich je najkratšia?

2. Postav troch chlapcov alebo nejaké iné tri predmety jedno za druhým tak, že budú stáť v prímej čiare!

Pred ktorý z troch drúčkov si staneme, keď na poli prímu čiaru vykolkúvame, a na ktorý visírujeme najsamprv?

Ako postavíme štyri, v ohrade stáť majúce stĺpy, do prímej čiary? *Ktoré* z nich postavíme najprv? a ktoré naposledy?

3. Niekto chce predĺžiť plot svojej zahrady, ako to prevedie, jestli starého plota stĺpy už v prímej čiare stoja? Od ktorého stĺpa bude visírovať na novo osadiť sa majúce?

§ 3. O prostopádnej či kolmej, vodorovnej a kosmej polohe prímok.

Pustíme-li nejaký kameň na zem voľno, pohybuje sa tenže vždy v jednom a tom istom smere či prosto na dol. Smer tento, v ktorom sa voľno na zem padajúci kameň pohybuje, menujeme *prostopádnym* smerom alebo ináčej i *kolmým* smerom, preto tak, že i prosto do zeme zabitý kôl tento smer ukazuje.

Keď nejaká prímka má takú polohu v priestore, ako prosto do zeme zabitý kôl, alebo ako voľno na zem padajúceho kameňa cesta, tenkráť menujeme ju *prostopádnou* alebo *kolmou* prímkou.

Prostopádnu či kolmú prímku znázorňuje, ako sme už riekli, každý prosto do zeme zabitý kôl. V takomto či prostopádnom smere padajú i dážďové kvapky so strechy a ovocie so stromu.

Obr. 10.


Obr. 11.

Na tabuli alebo na papieri menujeme prostopádnou alebo kolmou prímkou takovú, ktorá ide od hora na dol prosto, či ktorej ani jeden z jej koncov neuchyľuje sa ani v pravo ani v ľavo od pozorovateľa, trebas otáznej tabule alebo papieru poloha ku zemi nenie kolmá. *Obr. 10.*

Prostopádny či kolmý smer určujeme tak zvanou *závažou*, akú murári a tesári pri svojich prácach upotrebujú. Záväž pozostáva z jednoduchej na jednom zo svojich koncov olovenou guľkou opatrenej niti alebo šnúry. *Obr. 11.*

Zdvihneme-li svobodný koniec závaže do hora, vypne olovená guľka jej niť do prosta tak, že v svojom pokojnom stave táto ukazuje prostopádny či kolmý smer.

Závažou skúmajú murári a tesári kolmú polohu múrov, stĺpov atď.

Kolmá prímka slúži k určeniu diaľky nejakého predmetu od zeme. Tak na pr. výšku stolovej tably od zeme vyhľadáme, jestli k nej nejakú rovnú palicu v kolmej polohe alebo záväž pridržíme a túto potom vymeriame.

Učenci menujú prostopádny smer i *perpendikulárnym*, preto že i perpendikel či kyvadlo hodín, v svojom pokojnom stave, visí prostopádne.

Úlohy. 1. Nakresli svobodnou rukou a i upotrebením pravítka či linonára kolmú prímku! na papieri alebo na tabuli!

2. Oprobuj závažou, či steny izby stoja kolmo? — Ktoré predmety v izbe majú kolmú polohu? — Ako musejú visieť hodiny na stene?

3. Urči závažou výšku strechy alebo výšku o strechu opretého rebríka! Ako to prevedieš!

Nalejeme-li do pohára vody a počkáme, až sa ustojí, bude jej povrch mať zvláštnu polohu ku zemi. Túto polohu podrží voda i vtedy, jestli pohár krivo postavíme alebo máličko nachýlime. Tú istú polohu ku zemi, ako v pohári, má povrch stácej vody i v prírode na pr. v nejakom zápere alebo stave. Túto polohu možno si veľmi dobre, pomocou slámky, ktorá na nej pláva, znázorniť.

Prímku, ktorá má takú polohu ku zemi, ako povrch stácej vody alebo na nej plávajúca slámka, menujeme *vodorovnou* prímkou.

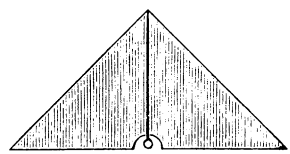
Vodorovnú prímku znázorňuje: priečny rámik na obloku, drevká o stenu opretého rebríka, váhadlo na vážkach, keď tieto v rovnováhe nachodia sa. Vodorovnú polohu má i podlaha a povala izby.

Učenci menujú vodorovný smer i *horizontálnym* preto, že i obzor či horizont má k pozorovateľovi vodorovnú polohu.

Na tabuli alebo na papieri menujeme vodorovnou prímkou takú, ktorá ide priamo od ľava v pravo a ktorej oba konce rovnovysoko od zeme nachodia sa. *Obr. 12.*

Obr. 12.

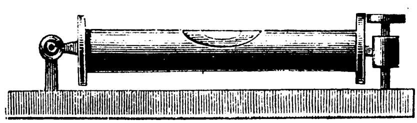
Vodorovný smer alebo vodorovnú polohu predmetov určujeme po prvé tak zvanou murárskou vážkou. *Obr. 13.* Táto vážka pozostáva z trojuhlastej doštičky a závaže, ktorážto posledná visí na dol z jej jedneho uhla. Od tohoto uhla k oprotnému kraju doštičky sostupuje v kolmom smere maličký žliabok, na jehož spodnom konci nachodí sa jamka pre guľku závaže. Postavíme-li vážku hore koncom, jej spodným krajom tak, ako to *obr. 13.* znázorňuje, na nejaký vodorovný predmet na pr. na stôl, vpadne niť závaže do žliabka a jej guľka do spomenutej jamky. Je-li otázny predmet, na ňomž stojí vážka, nie vodorovný, tedy vystúpi záväž zo žliabku a odkloní sa v tú stranu predmetu, ktorá leží nižšie.



Obr. 13.

Obyčajne kladieme na predmet, o jehož vodorovnej polohe sa chceme presvedčiť, rovnohrubú latu a na túto potom otáznu vážku. Takto či upotrebením laty skúmajú na pr. stolári vodorovnú polohu podlahy a murári vodorovnú polohu múru.

Krem murárskej vážky upotrebujeme v živote k *vyskúmaniu* vodorovnej polohy či vodorovného smeru ešte i tak zvanú *vodnú* vážku (libellu). Vážka táto pozostáva zo sklennej na oboch svojich koncoch mosadzovými pošvičkami opatrenej rúrky, ktorá leží na doštičke podobnom pod-stávku. V nútri rúrky nachodí sa voda s bublinou povetria v sebe obsahujúcou. *Obr. 14.*

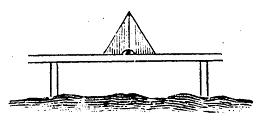


Obr. 14.

Leží-li takáto vodná vážka na nejakom vodorovnom predmete na pr. na vodorovnom stole, zjaví sa jej bublinka v stredu rúrky. Je-li ale otázny predmet nie vodorovný, ubehne rečená bublinka v tú stranu predmetu, ktorá leží vyššie.

Vodnou vážkou vážime cele tak, ako murárskou, t. j. vyvážiť sa majúci predmet, na pr. na vyvážiť sa majúci billard položíme najprv (v rozličnych smeroch) rovnohrubú latu a na túto vodnú vážku.

V prírode či na slobode určujeme vodorovnú polohu, vodorovný smer, vodorovne vytiahnutou šnúrou. Tým cieľom vbijeme do zeme v potrebnej dialke dva kolíky a na ne položíme rovnohrubú latu niečo dlhšiu než je vzdialenosť kolíkov jedneho od druhého Na latu v jej stredu postavíme murársku alebo vodnú vážku a vyhľadáme jej vodorovnú polohu na hor udaný spôsob. Leží-li jeden alebo druhý koniec laty nižšie, pobijeme dľa potreby vyšší kolík na dol, až nastúpi rovnováha. Vytiahneme-li ponad takto do rovnováhy vyvážené kolíky šnúru, musí i táto mať vodorovnú polohu. *Obr. 15.*



Obr. 15.

Je-li šnúrou vyznamenať sa majúca vodorovná prímka dlhšie nežli lata, vbijeme do zeme v prímej čiare, jeden po druhom, viac kolíkov a vyvážime ako pred tým najprv dva prvé, potom druhý a tretí, na to tretí a štvrtý atď. Poneváč vrchy všetkých takto vyvážených kolíkov ležia vo vodorovnej prímej čiare, musí i ponad ne vytiahnutá šnúra mať vodorovný smer či vodorovnú polohu.

Úlohy. 1. Nakresli vodorovnú čiaru na tabuli alebo na papieri linonárom!

Prečo menujeme túto prímku vodorovnou? — *Kedy* má nejaká prímka vodorovnú polohu? — *Akú* polohu má na stácej vode plávajúca slamka? — *Ktoré* veci v izbe majú vodorovnú polohu? — *Kedy* leží vážkové váhadlo vodorovno? — *Kedy* opíše nejaké, postupne pohybujúce sa teleso vodorovnú prímku?

2. Oprobuj upotrebením murárskej alebo vodnej vážky vyskúmať či vrch stola leží vodorovno!

Ako skúmame vodorovnú polohu stola? alebo vodorovnú polohu podlahy? — *Kedy* ukazuje murárska vážka vodorovný smer? a vodná? *Kedy* neukazuje murárska vážka vodorovný smer? a vodná?

3. Vystri nejakú šnúru vodorovno! Ako to prevedieš?

Ako predĺžime nejakú, vodorovnou šnúrou označenú prímku?

4. Zabi do zeme štyri kolíky tak, že dva a dva stoja tak jeden oproti druhému ako na lavici nohy a vyváž ich latou a vážkou!

Koľko kolíkov vyvážiš najprv? a koľko za každým? — *Akú* polohu bude mať na takto vyvážené kolíky položená doska?

Krem vodorovného a kolmého rozoznávame ešte i tak zvaný ***kosý*** či ***kosmý*** smer či kosmú polohu. Pod kosmým smerom rozumieme taký, ktorý nenie ani vodorovný ani kolmý. A preto prímku, ktorej poloha nenie ani vodorovná ani kolmá, lež od oboch týchto smerov odchýlna, menujeme *kosmou* alebo ***kosou prímkou***. Príklad kosmého smeru alebo kosej polohy, podáva nám na pr. o stenu opretá palica, alebo o stenu opretý rebrík, boky dachu atď.

Dotýka-li sa vodorovná prímka kolmej alebo kolmá vodorovnej, hovoríme, že stoja jedna na druhej kolmo. Dve takéto jedna na druhej kolmo stojacie prímky znázorňujú na pr. priečne a pozdlžné obločné rámy, alebo dva súsedné kraje štvoruhl. stola atď.

Úlohy. 1. Nakresli na tabuli alebo papieri kosmú prímku: *a)* jejž pravý koniec vystupuje do hora! *b)* jejž pravý koniec sostupuje na dol!

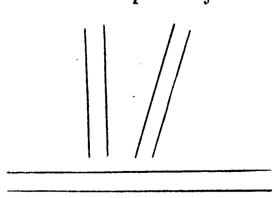
Aký smer má tekúca voda, tejto povrch? — *Akú* polohu má na kolkárni žliebok? — O *ktorej* hodine má hodinovú ručička kosmú? o *ktorej* vodorovnú? a o *ktorej* kolmú polohu? — O *ktorej* hodine stojí minútová ručička na hodinovej kolmo? — *Kedy*, v ktorom prípade, opíše na tabuli pohybujúci sa bod na pr. krieda, kosmú prímku?

2. Nakresli na tabuli tri, čo do smeru jedna od druhej rozdielne kosmé prímky!

Koľkoraký smer majú tri na tabuli nakreslené vodorovné prímky? — *Koľkoraký* smer majú tri na tabuli nakreslené kolmé prímky? — *Koľkoraký* smer majú tri na tabuli nakreslené a čo do svojho smeru jedna od druhej rozdielne prímky?

§ 4. O rovnobežných prímkach.

Dve rovné paličky možno i v jednom a tom istom smere jednu ku druhej na stôl položiť. Tak na pr. dve takéto paličky možno vo vodorovnom, ďalej v kolmom, a konečne i v jednom a tom istom kosmom smere jednu ku druhej položiť.



Obr. 16.

Ako paličky, podobno možno i dve prímky jednu ku druhej v jednom a tom istom smere, na pr. obe vo vodorovnom, potom obe v kolmom, konečne obe v jednom a tom istom kosmom smere, na tabuli alebo papieri načiarať. *(Obr. 16.)*

Takéto dve, ***v jednom a tom istom smere načiarané prímky*** menujeme ***rovnobežnými*** či parallelnými prímkami.

Dve rovnobežné prímky ležia jedna od druhej rovnoďaleko. Predĺžime-li rovnobežné prímky v pravo alebo v ľavo, čo priam do nekonečne veľkej diaľky, nestyknú, či nesídu sa dovedna.

Pravdaže nie len dve ale i tri a viac prímok možno jednu ku druhej v jednom a tom istom smere, či rovnobežno načiarať.

Rovnobežné prímky predstavujú: boky a priečky rebríka, protistojné, alebo oprotnoležiace obločné rámy, železničné kolajnice, kraje hradskej atď.

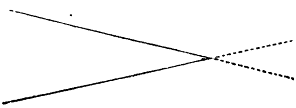
Úlohy. 1. Nakresli dve, tri rovnobežné prímky: *a)* vodorovnej, *b)* kolmej, *c)* kosmej polohy!

Prečo sú vodorovné alebo kolmé prímky súčasne i rovnobéžné? — *Aké* boky má obrezaná doska? — *Ktoré* čiastky izby alebo domu majú rovnobežnú polohu?

2. Nakresli ľubovoľnej polohy prímku a k nej druhú, s ňou rovnobežnú?

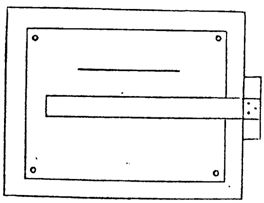
Jestli z dvoch rovnobežných čiar je jedna kosmá prímka, aká musí byť tá druhá?

Dve prímky, ktoré nemajú jeden a ten istý smer, menujeme *nerovnobežnými.* Takéto dve nerovnobežné prímky, na jednej zo svojich strán sa jedna k druhej sbližujú či *sbiehajú* (konvergujú) a na druhej jedna od druhej odďaľujú či *rozbiehajú* (divergujú). Predĺžime-li dve nerovnobežné prímky na ich sbiehavej strane, tedy sa konečne styknú a jestli ich ešte i ďalej predĺžime, tedy sa režú. *(Obr. 17.)*

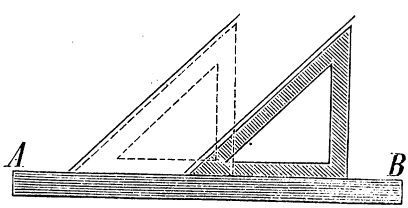


Obr. 17,

Na kresliacej doske čiarame vodorovno rovnobežné čiary, operadlom opatreným čili operadlovým linonárom (*obr. 18.*); kolmo a kosmo rovnobežné operadlovým linonárom a takzvaným trojuhelníkom.



Obr. 18.



Obr. 19.

Otázny trojuhelník je z dreva, má jeden dlhší a dva kratšie boky; kratšie boky stoja jeden na druhom kolmo. *Obr. 19.*

Opreme-li trojuhelník svojím kratším bokom o vodorovno ležiace operadlový linonár a čiarame-li — postrkujúc ho po linonári — pozdĺž jeho najdlhšieho boku, obdržíme kosmej polohy rovnobežné.

Opreme-li trojuhelník ako predtým svojím kratším bokom o operadlový linonár a čiarame-li — postrkujúc ho po linonári — pozdĺž druhého kratšieho boku, obdržíme kolmej polohy rovnobežné.

Samo sebou rozumie sa, že počas kreslenia ako linonár tak i na doske vystretý papier nesmú sa hybnúť zo svojho miesta a podobne i trojuhelník musí tiež o linonár dobre priliehať. Papier pripevňujeme na dosku klinčekami, tlapkavou hlávkou opatrenými.

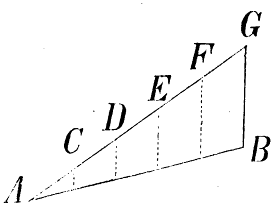
Úlohy. 1. Nakresli upotrebením linonára: dve, tri vodorovno rovnobežné!

2. Podobne, nakresli trojuholníkom a linonárom: dve, tri kosmo, a dve, tri kolmo rovnobežné!

3. Nakresli jednu vodorovnú prímku a na ňu dve kosmo rovnobežné!

Znak rovnobežnosti sú dve kolmé rovnobežné čiarky ||. Na pr. $AB \parallel CD$ čítaj: čiara AB je rovnobežná s CD.

Rovnobežnými čiarami možno nejakú prímku na viac rovných alebo i nerovných čiastok rozdeliť. Tak na pr. máme-li prímku AB na päť rovných čiastok rozdeliť, načiarame od začiatočného bodu A, druhú, od nej odbiehavú prímku, AG, na ktorej, počnúc od bodu A, naznačíme kružidlom (cirklom) päť ľubovolnodlhých, avšak rovných čiastok: AC, CD, DE, EF, FG. Posledný bod G spojíme s B a k obdržanej prímke GB, čiarame cez deliace body E, F, C, D rovnobežné. Tieto posledné delia danú AB na päť rovných čiastok. *Obr. 20.*



Obr. 20.

Týmto spôsobom možno nejakú prímku na ľubovoľný počet rovných (alebo i nerovných) čiastok rozdeliť; pravdaže keď delíme na 7 rovných čiastok, označíme na odbiehavej AG kružidlom 7 ľubovoľnodlhých avšak rovných čiastok atď.

Úlohy. 1. Nakresli ľubovoľnodlhú prímku AB a rozdeľ ju na 10 rovných čiastok!

2. Vezmi do kružidla: $^1/_{10}$ AB! $^2/_{10}$ AB! $^7/_{10}$ AB!

§ 5. O vymeriavaní prímych čiar či prímok.

Prímky či príme čiary meriame: metrom; podobne ako kupec súkno. Meter je desaťmillionová časť zo štvorníka čili quadranta cez točny našej zeme idúceho obvodu. Celý tento, cez točny idúci obvod našej zeme obnáša 40 millionov metrov, a preto na jeho štvrtú časť či na jeho štvorník pripadne 10 millionov metrov.

Meter, ako známo, delíme na 100 *centimetrov* (100 *cm*).

Poneváč 1 meter má 100 centimetrov, tedy: $^1/_{100}$ *m* či 0·01 *m* je 1 *cm*; $^2/_{100}$ *m* či 0·02 *m* sú 2 *cm* atď.

A naopak: 1 *cm* je $^1/_{100}$ *m* či 0·01 *m*; 2 *cm* sú $^2/_{100}$ *m* či 0·02 *m* atď.

Centimetre sú stotiny metra.

A poneváč celý meter je 100 centimetrov, tedy: $^1/_{10}$ *m* či 0·1 *m* je 10 *cm*; $^2/_{10}$ *m* či 0·2 *m* je 20 *cm* atď.

A naopak: 10 *cm* je $^1/_{10}$ *m* či 0·1 *m*; 20 *cm* sú $^2/_{10}$ *m* či 0·2 *m* atď.

Desatiny metra menujeme decimetrami (dm).

Ešte menšie čiastky metra sú takzvané *millimetre*. Meter má 1000 millimetrov či 1000 *mm*.

Poneváč 1 *m* má 1000 *mm* tedy: $^1/_{100}$ *m* či 1 *cm* je 10 *mm* $^2/_{100}$ *m* či 2 *cm* je 20 *mm* atď.

$^1/_{10}$ *cm* či 0·1 *cm* je 1 *mm*; $^2/_{10}$ *cm* či 0·02 *cm* sú 2 *mm* atď. Podobne poneváč 1 *m* je 1000 *mm* tedy: $^1/_{1000}$ *m* či 0·001 *m* je 1 *mm*; $^2/_{1000}$ či 0·002 *m* sú 2 *mm* atď.

A naopak: 1 *mm* je $^1/_{1000}$ *m* či 0·001 *m*; 2 *mm* sú $^2/_{1000}$ *m* či 0·002 *m* atď.

Millimetre sú tisíciny metra.

1000 metrov veľkú diaľku menujeme *kilometrom* (*km*) a 10000 veľkú diaľku *myriametrom* (*my*).

Úlohy. 1. Nakresli ľubovoľnodlhú prímku a vymeraj jej dĺžku! Obdržanú dĺžku vyslov: v metroch! v centimetroch! v millimetroch!

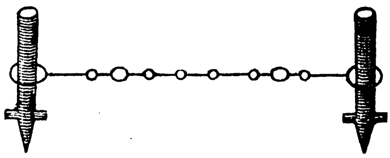
2. Nakresli: 2 *cm*! 5 *cm*! 8 *cm*! 9 *cm*! 12 *cm*! dlhé prímky!

Koľko cm je: 0·56 *m*? 2·40 *m*? 0·07 *m*? Odp. 56 *cm*, 240 *cm*, 7 *cm*.

Koľko m je: 732 *cm*? 45 *cm*? 84 *mm*? Odp. 7·32 *m*, 0·45 *m* 0·084 *m*.

Dlhšie prímky meriame 5 *m* dlhou latou, aby sme na čase získali. Meričia upotrebujú pri vymeriavaní lúk a poľa takzvanú *meriacu* reťaz. Takáto reťaz je obyčajne 20 *m* dlhá a článkatá, jej jednotlivé články nejsú však oká, ako na obyčajných reťazách, ale brkohrubé a na svojich oboch koncoch ohnuté a mosadzovými obrúčkami jeden s druhým spojené drôty. Niektoré z týchto mosadzových obrúčok sú väčšie než ostatné. Diaľka väčších obrúčok, jednej od druhej — vlastne diaľka, od stredu jednej ku stredu druhej obrúčky — obnáša u kratších retiaz 1 *m* a u dlhších 5 *m*. Krem týchto má každá takáto reťaz, ako na začiatku tak i na svojom konci po jednej najväčšej obrúčke. Pravá diaľka celej reťaze meria sa od stredu najväčšej začiatočnej, po stred najväčšej konečnej obrúčky.

Každá, reťazou vymerať sa majúca prímka, musí sa prv vykolkovať. Vystieranie reťaze po vykolkovanej prímke deje sa pomocou dvoch, na svojom jednom konci zaostrených a železom obitých drúčkov. Jeden koniec reťaze svojou najväčšou obrúčkou nastoknutý je na jednom a druhý koniec na druhom drúčku. Aby reťaz s drúčka nespadla, tomu prekáža na spodnom konci drúčka nalezajúca sa priemka *Obr. 21.*



Obr. 21.

K vymeriavaniu prímok reťazou potrebné sú dve osoby. Samo meranie deje sa tak, že prvá z osôb zabodne svoj drúček, na ktorom je už reťaz nastoknutá, do počiatočného bodu prímky a druhá, k prvej tvárou obrátená, vlečie nastoknutú reťaz pred sebou a ťahá ju drúčkom až dotiaľ, kým sa táto nevystre. Takto vystretá reťaz zriedka spadne s vykolkovanou prímkou dovedna, na čo pozoruje tá prvá osoba. Odchyľuje-li sa reťaz v pravo, dáva jej, t. j. druhej osobe, znak máchaním ruky v ľavo; odchyľuje-li sa ale reťaz v ľavo, dáva jej znak máchaním ruky v pravo.

Leží-li konečne reťaz v smere vykolkovanej prímky, vytiahnu obe osoby svoje drúčky i s reťazou zo zeme; tá druhá zabodne do toho bodu, kde jej drúček stál, do stredu jamky železný klin takzvaný číselník a vlečie celú reťaz pomocou svôjho drúčku ďalej po vykolkovanej čiare. Keď prvá osoba, nasledujúc druhú, došla k zabodnutému číselníku, vytiahne ho zo zeme a na jeho miesto zabodne svoj drúček. Nato vystrú reťaz ako predtým a pokračujú v meraní týmto spôsobom až do konca prímky.

Koľkokráť celú reťaz vystreli, toľko číselníkov má u seba prvá osoba a toľkokráť 20 *m* je dlhá celá prímka. Má-li prvá osoba päť číselníkov u seba, obnáša celá prímka 5 $\times$ 20 *m* či 100 *m*.

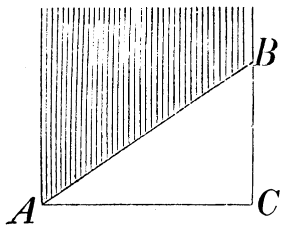
Presahuje-li posledný výster reťaze vykolkovanú prímku, vymerajú otázny nadbyt metrom a odčítajú z celej summy. Presahuje-li na pr. posledný výster celú prímku, o 3 *m* odčítajú sa z celej jej dĺžky 3 *m*.

Pri meraní reťazou treba predovším k tomu pozorovať, aby sa reťaz od smeru vykolkovanej prímky ani v pravo ani v ľavo neodchylovala a aby rovno vystretá bola; potom, aby drúčky kolmo v zemi stály; ďalej, aby druhá osoba, ktorá reťaz vláči a vystiera, prvej osoby drúček z jeho miesta nepohla; taktiež, aby drúčky a číselníky na pravom mieste do zeme sa zabodly; konečne aby silným vystieraním dĺžka reťaze sa nepremenila. Poneváč toto posledné sa veľmi často stáva, preto musíme reťaz pred meraním vymerať a zbadanú chybu napraviť.

Meriame-li cez kopce, zdvihneme reťaz ponad kopce do hora, a vystreme vodorovno. Pri malých kopcoch a malých vyvýšeninách dostačí i len jej niečo tuhšie vystretie.

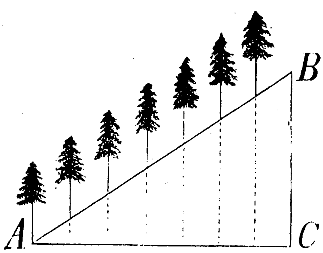
Spomenuté dvíhanie ponad kopce vo vodorovnom smere má svoju zvláštnu príčinu. Meričia totiž pri meraní vrškovatej role alebo vrškovatého lesa na vršky a jamy ohľad neberú a všetko len vo vodorovnom smere a vodorovnej polohe merajú. Leží-li totiž nejaká vymerať sa majúca roľa na svahu vrchu, tedy nevymerajú jej pravú dĺžku po zemi, ale len jej prômet či jej projekciu na dol.

Pod prômetom nejakej plochy na dol, rozumieme jej vodorovný stín či tieň, ktorý vtedy obdržíme, keď ju od shora kolmo osvietime, alebo osvetlenou byť si myslíme. Tak na pr. prômet paličky AB (*obr. 22.*) je prímka AC, bo jestli paličku AB od hora kolmo osvietime, bude jej tieň AC. Otázny prômet AC prímky AB i bez skutočného osvietenia snadno najdeme, jestli cez jej začiatočný bod A vodorovnú načiarame, a z jej konečného bodu B kolmú (BC) spustíme.



Obr. 22.

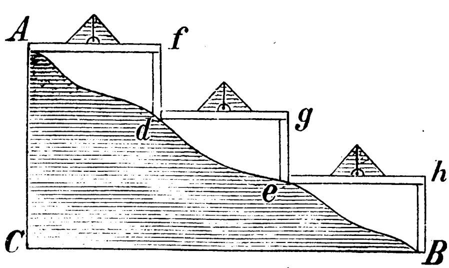
Že meričia len prômet merajú, príčinu toho nahliadneme, keď povážime, že na nejakom svahu AB práve toľko trávy, obilia, alebo stromov rastie, koľko by na jeho prômete AC riastlo, keby bol obilím, trávou alebo lesom zasiaty. O pravdivosti tohoto ešte i tak sa snadno presvedčíme, jestli na svahu AB rastúce stromy (trávu alebo obilie) v mysli, v kolmom smere na dol predlžime. Na prômete AC môže len toľko stromov alebo obilia rásť, koľko na svahu AB. *Obr. 23.*



Obr. 23.

Pravda, že všetko toto, čo o prômete sme povedali, platí len pri meraní poľa alebo lesov, či keď hľadáme nie opravdovej ale len plodonosnej plochy veľkosť.

Je-li dvíhanie reťaze pre veľkosť kopcov alebo pre veľkosť svahu nemožné, podelíme vymerať sa majúcu čiaru, ktorej prômet hľadáme, na viac ľubovoľných čiastok, a vyhľadáme každej čiastky prômet o sebe. Tak na pr. mámeli vymerať prômet čiary AB, (*obr. . 24.*), podelíme túže na čiastky Ad, de a eB a určíme ich prômety: Af, dg. eh latou a vážkou, pravda na hor, bo do zeme nemožno. Prômet čiastky Ad na hor, je prímka Af, prômet čiastky de



Obr. 24.

na hor, je prímka *dg* a prômet čiastky *eB*, je prímka *eh*. Jednotlivé tieto prômety vyhľadáme latou a vážkou tým spôsobom, že v bode *d* zabijeme kolík *df*, v bode *e* kolík *eg* a v bode *B* kolík *hB* kolmo a potom vyvážime a odmeriame najprv *Af*, potom *dg* a konečne *eh*. Všetky tieto tri prímky či $Af + dg + eh$ činia spolu toľko, koľko celý prômet *CB* čiary *AB*. Znamená-li čiara *AB* skutočnú dĺžku nejakej role, tedy prômet *BC* znamená dĺžku jej zodpovedajúcej plodonosnej plochy, ktorú sme hľadali.

Pri vymeriavaní spomenutých prômetov musíme na to pozorovať, aby kolíky, na ktorých lata leží, kolmo stály a aby poloha laty cele vodorovná bola o čom sa vážkou presvedčíme.

Samo sebou rozumie sa, že čiaru *AB*, ktorej prômet hľadáme, prv vykolkujeme. Obnáša-li na pr. prômet *Af* 6 *m*, *dg* 8 *m* 40 *cm* a *eh* 7 *m* 30 *cm*, obnáša celý prômet $BC = 21$ *m* 70 *cm*.

M e r i č s k é ú l o h y. 1. Označ na dvoch kolmo do zeme zabitých kolíkoch rovný úroveň či rovné niveau (čítaj nivó!) majúce body.

R o z l. Latu *AB* opreme o oba kolíky a vyvážime ju murárskou alebo vodnou vážkou. Keď je to hotové, označíme na každom kolíku, hneď nad latou, nalezajúci sa bod čiarkou. Poneváč vyvážená lata má vodorovnú polohu, musejú aj nad ňou označené body mať ten istý úroveň.

2. Vyploš či vyrovnaj (vyplaníruj) hrbolatý dvor, alebo hrbolatú zahradu.

R o z l. Na viac miestach vyplošiť sa majúceho dvoru, menovite na jeho priehlbinách a vyvýšeninách, zabijeme kolmo do zeme viac kolíkov a vyhľadáme, ako v predošlej úlohe, na všetkých jeden a ten istý úroveň majúce body, pravdaže najprv len na dvoch kolíkoch, potom na jednom z týchto a na nasledujúcom atď. postupne až do posledného. Keď je to hotové, vymeriame na každom kolíku diaľku od zeme až po označený úroveň. Tieto diaľky (výšky) poučia nás, kde koľko máme odobrať a kde koľko pridať, aby úroveň celého dvora bol jeden a ten istý.

3. Vymeraj prímu čiaru z jednej do druhej susednej dolinky popod vrch! (na pr. dĺžku vykopať sa majúceho jasku či tunellu).

R o z l. Prvou úlohou bude otáznu čiaru najprv ponad vrch z jednej do druhej dolinky, vykolkovať. Vykolkovanej čiary prômet ale vymeriame potom po čiastkach tak, ako to obr. 24 znázorňuje. Pri meraní dolu vrchom snadnejšie cieľa dôjdeme, jestli vážku na ten koniec laty, ktorým vopred ideme, pripevníme a niť záväze na toľko predĺžime, že môže až k zemi dosahovať, spolu ale i dierku na vrchole vážky natoľko zväčšíme, že ňou prevlečená záväž dľa vôle sa dá spúšťať a vyťahovať. Takto prestrojená záväž ukazuje súčasne nielen vodorovný smer laty ale i ten bod na zemi, v ktorom ju pri nasledujúcom vývahu máme opreť. Bod tento označíme predbežne malým kolkom. Koľkokráť sme latu hore a dolu vrchom vyvážili, toľkokráť

4 m alebo 5 m obnáša hľadaný prômet, či otázna, popod vrch idúca prímka.

4. Vyváž spád nejakej tekúcej vody, na pr. spád nejakého potoka!

Rozl. V tejto úlohe vyhľadávame rozdiel výšky, medzi dolným a horným riečišťom otázneho potoka či nivellisujeme.

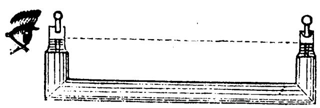
Keď totiž u dvoch, v nerovnom niveau ležiacich bodov hľadáme, o koľko jeden z nich leží vyššie než druhý, vtedy *nivellisujeme.*

Rozlúštenie tejto úlohy znázorňuje horeudaný obr. 24. Vymeriame-li totiž, jedno po druhom, výšku drúčka: Bh, eg a df a sčítame-li tieto výšky dovedna, bude súčet všetkých toľko obnášať, koľko kolmá AC, a toľký je i spád celého potoka, t. j. o toľko nachodí sa jeho horné riečište vyššie než dolné. Obnáša-li, tak na pr., $Bh = 2\,m$, $eg = 3\,m\ 40\,cm$, $df = 2\,m\ 60\,cm$, nachodí sa bod A o 8 m vyššie, než bod B, či celý spád otázneho potoka má v celku 8 m.

Chceme-li vyskúmať, koľko metrov spádu pripadne na každý meter dĺžky, musíme 8 m čí celý spád dĺžkou celého potoka rozdeliť. Je-li otázny potok na pr. 100 m dlhý, pripadne na každý jeden m spádu $8 : 100 = 0{\cdot}08$ m či 8 cm.

Tu udaný spôsob k vymeriavaniu spádu alebo vôbec k vymeriavaniu výškového rozdielu u dvoch, v rozdielnom niveau ležiacich bodov, je síce dôkladný, no prizdĺhavý. Menovite spád potoka možno o mnoho rýchlejšie tak zvanou kanálnou vážkou vyvážiť, a síce preto, že poslednou odrazu i do 30 m veľkej diaľky možno nivellisovať.

Kanálna vážka pozostáva z bľachovej, na oboch svojich koncoch do hora ohnutej trubice; každý koniec končí sa do hora čnejúcej sklenej rúrky. *Obr. 25.* Nalejeme-li do kanálnej vážky nejakej tekutiny na pr. vody, vystúpi táto v oboch rúrkach rovno vysoko do hora. Slovom, v kanálnej vážke nalezajúca sa voda má v oboch rúrkach vždy rovnaký úroveň.



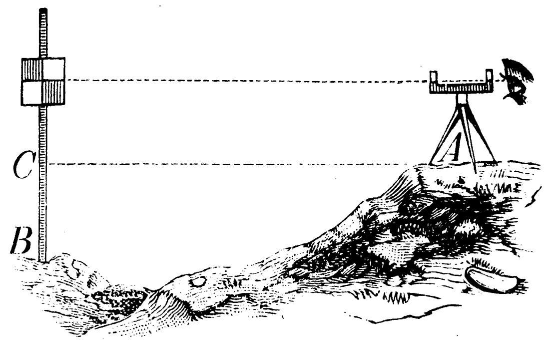
Obr. 25.

Visírujeme-li ponad vrch, v oboch rúrkach kanálnej vážky obsaženej vody, do diaľky, na nejaký predmet, na pr. na nejaký strom a na ňom sa nalezajúci list, musí tento posledný v tom istom úrovni nachodiť sa, v ktorom nachodia sa vrchy v oboch rúrkach nalezajúcej sa vody.

Aby sme pohodlne visírovať mohli, tým cieľom pripevníme kanálnu vážku na trojnohovú podstávku tak, že ju šróbou, dľa potreby, možno povýšiť alebo snížiť. *Obr. 26.*

Krem tohoto prístroja potrebujeme k nivellisovaniu kanálnou vážkou ešte i dosť vysoký drúček s tabuľkou, ktorú možno hore a dolu ním šmíkať. Táto tabuľka rozdelená je kolmou a vodorovnou prímkou na štyri rovno veľké polia, ktoré sú zamieňavo na červeno a bielo zabarvené, a drúček podelený je na centimetre.

Máme-li upotrebením kanálnej vážky nejaké dva, prirovnalo v rozdielnej výške ležiace body na pr. A a B nivellisovať, t. j. vyhľadať, o koľko vyššie leží bod A než B, postavíme kanálnu vážku vo vyššom bode A a otázny drúček s tabuľkou v nižšom bode B. Na to jedna z dvoch osôb vysíruje t. j. pozerá ponad niveau a či ponad úroveň vo vážke nalezajúcej sa (obyčajne na červeno zabarvenej) vody na tabuľku, druhá osoba ale dvíha alebo spúšťa túto dľa pokynu prvej osoby až dotiaľ, kým tabuľku deliaca vodorovná prímka neleží v tom istom úrovni, ktorý má vo vážke obsažená voda, tejto vrch. (*Obr. 26.*)



Obr, 26.

Po vyhľadaní úrovňa odmeriame výšku drúčka, počnúc od zeme až po vodorovnú prímku tabuľky a podobne i výšku kanálnej vážky, počnúc od zeme až po úroveň v nej obsaženej vody. Odčítame-li teraz poslednú výšku od tamtej, obdržíme rozdiel BC či výšku bodu A nad bodom B t. j. o koľko leží vyššie bod A nežli B. Obnáša-li, tak na pr. výška drúčku, počnúc od zeme až po jeho vodorovnú čiaru tabuľky 3 *m* 40 *cm* a výška kanálnej vážky 2 *m* 10 *cm*, je hľadaný rozdiel 1 *m* 30 *cm*, či bod A leží o toľko vyššie než bod B. Túto výšku menujeme i ***prirovnalou*** či vzťažnou alebo relatívnou výškou, kdežto výšku nejakého bodu od hladiny mora menujeme zas ***absolútnou*** či ***pravou*** výškou.

Poneváč kanálnou vážkou len asi na 30 *m* ďaleko možno bezchybne nivellisovať, preto väčšie diaľky, na pr. riečište dlhšieho potoka, podelíme na čiastky a nivellisujeme potom po čiastkach, obdržané ale výškové rozdiely sčítame dovedna. Pravdaže, týmto spôsobom nivellisujeme len vtedy, jestli zem, po ktorej meriame, ustavične do hora vystupuje a žiadne jaminy v sebe neobsahuje.

Nivellisujeme-li po vŕškoch a po jaminách, napíšeme po vŕškoch či pri vystupovaní pôdy obdržané výškové rozdiely o sebe a po jaminách či pri sostupovaní pôdy obdržané výškové rozdiely tiež o sebe a potom zo súčtu tamtých odčítame tieto. A to je hľadaný rozdiel výšky na pr. medzi začiatočným bodom A a konečným bodom B.

5. Vymeraj výšku vrchu, jeho vrcholu nad dolinou alebo nad úpätím! Taktiež výšku do hora vystupujúcej cesty!

Rozl. Výšku vrchu poťažne jeho vrcholu nad dolinou alebo úpätím vymeriavame murárskou vážkou a latou, tak ako to obr. 24. znázorňuje, s tým rozdielom, že v tomto prípade čiaru, ktorou do hora vystupujeme, netreba vykolkovať, a že od doliny alebo úpätia až po vrchol vrchu možno i sem a ta t. j. v lomených čiarach úbočou, dľa ľúbosti do hora vyvažovať a po vyvážení obdržané výškové rozdiely jednotlivých bodov dovedna sčítať. Obdržaný súčet zo všetkých výškových rozdielov je hľadaná výška vrcholu nad úpätím alebo nad dolinou.

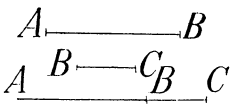
Podobne či vážkou a latou vymeriavame i výšku hore vrchom vystupujúcej cesty. *Obr. 24.* I v tomto prípade nemusíme za cestou, ale sem a ta bokom, v lomených čiarach do hora vystupovať a obdržané výškové rozdiely dovedna sčítať.

Chceme-li spád alebo strmosť cesty v odstovkách vypočítať, musíme prv dĺžku celej cesty 100-mi a obdržaným číslom potom jej výšku rozdeliť. Tak na pr. obnáša-li dĺžka nejakej cesty 3500 *m* a jej výška, počnúc od najnižšieho až po jej najvyšší bod 70 *m*, tedy je jej strmosť v odstovkách 3500 : 100 = 35 a 70 : 35 = 2% t. j. na každých 100 *m* obnáša jej strmosť 2 *m*.

§ 6. O sčitovaní, odčitovaní, násobení a delení prímok.

Ako čísla, podobne možno i prímky: sčítať, odčítať, násobiť a deliť.

Dve prímky na pr. AB a BC dovedna sčítať znamená: toľkú novú prímku vyhľadať, koľké sú obe známe dovedna. Nová táto prímka predstavuje ich súčet. *Obr. 27.*



Obr. 27,

Tento prímkam AB a BC zodpovedajúci súčet najdeme, jestli na ľubovoľnodlhej tretej prímke, počnúc od jej začiatočného bodu A, najprv prímke AB a potom prímke BC zodpovedajúcu dĺžku kružidlom odsekneme. Prímka AC je hľadaný súčet oboch prímok AB a BC, čo nakrátce označujeme takto: $AB + BC = AC$.

Podobne možno i tri, štyri alebo viac známych prímok dovedna sčítať a ich súčtom zodpovedajúce prímky vyhľadať.

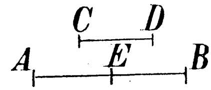
Úlohy. 1. Načiaraj dve 3 *cm* a 5 *cm* dlhé prímky a vyhľadaj ich súčtu zodpovedajúcu tretiu!

Koľko cm musí táto tretia či ich súčet obnášať?

2. Nakresli tri ľubovoľnodlhé prímky a pod ne štvrtú, ich súčtu zodpovedajúcu!

Čo je súčet z prímok? Súčet z prímok je prímka.

Z nejakej prímky na pr. z prímky AB prímku CD odčítať znamená, toľkú novú prímku vyhľadať, o koľko tamtá prvá väčšia je než táto. Novú túto prímku menujeme rozdielom či zbytkom. *Obr. 28.*



Obr. 28.

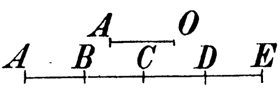
Otázny prímkam AB a DC zodpovedajúci rozdiel najdeme, jestli z prvej prímky či z AB, počnúc od jej začiatočného bodu A, prímke CD zodpovedajúci kus kruždlom odsekneme. Je-li odseknutý kus $AE = CD$, tedy pozostalý zbytok či hľadaný rozdiel je EB, čo označujeme nakrátce takto: $EB = AB - CD$.

Úlohy. 1. Nakresli prímku 18 *cm* a druhú 12 *cm* dlhú a načiaraj tretiu, ktorá zodpovedá ich rozdielu.

Koľko cm obnáša hľadaný rozdiel či zbytok?

2. Nakresli dve nerovnodlhé prímky a vyhľadaj ich rozdiel. Ako to prevedieš kružidlom? ako bez krúžidla? metrom?

Nejakú prímku: dvoma, troma atď. násobiť znamená: novú dvakráť, trikráť atď. toľkú prímku, koľka je známa, načiarať. Prímka táto predstavuje potom dvoj-, troj- a vôbec viac násobok známej prímky. Otázny dvoj-, troj- a vôbec viac násobok nejakej prímky na pr. prímky AO vyhľadáme, jestli kružidlom na nejakej druhej ľubovoľnodlhej prímke, jej dĺžke zodpovedajúci kus, počnúc od začiatočného bodu A, jedno po druhom, dvakráť, trikráť a vôbec viackráť odsekneme. *Obr. 29.*



Obr. 29.

Tak na pr. prímka AC je dvojnásobok prímky AO; prímka AD. je trojnásobok prímky AO atď., čo označujeme nakrátce takto:

$$AC = 2AO,\ AE = 4AO \text{ atď.}$$

Prímka AO je *miera* prímok: AC, AD a AE a tieto sú jej viacnásobky, poťažne jej dvoj-, troj-, štvornásobky.

Úlohy. 1. Nakresli 2-kráť 4 *cm*, 4 $\times$ 5 *cm*, 8 $\times$ 4 *cm* dlhú prímku!

2. Nakresli nejakú ľubovoľnodlhú prímku AO a pod ňu jej: dvoj-, troj-, štvor- a päťnásobok, či dvakráť, trikráť, štyrikráť, päťkráť dlhšie prímky, nežli je známa AO.

Nejakú prímku: dvoma, troma atď. deliť znamená novú dvakráť, trikráť atď. menšiu prímku vyhľadať, nežli je daná, známa. Tieto dvakráť, trikráť atď. menšie prímky menujeme *podielami.*

Vyhľadávanie podielu deje sa na rozličný spôsob.

Máme-li nejakú prímku na pr. AC na dve rovné čiastky *(Obr. 30.)* rozdeliť, vyhľadáme na nej taký bod B, ktorý leží rovno ďaleko od jej oboch koncov A a C či v polovici prímky AC. Bod tento najdeme, jestli jedno rameno kružidla do jej začiatočného bodu A opreme a druhým, dľa oka, prímku na polovice rozdelíme. Či je prímka AC opravdu na dve polovice rozdelená, t. j. či deliaci bod B v jej polovici nachodí sa, o tom sa presvedčíme: jestli jeho diaľku tým istým otvorom kružidla i od druhého konečného bodu C vymeriame. Sú-li obe tieto diaľky rovnaké, tenkrát je prímka AC v bode B na dve rovné časti rozdelená.

Obr. 30.

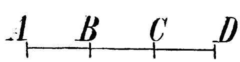
Niesú-li rečené diaľky AB a BC rovnaké, zúžime alebo rozotvoríme ramená kružidla dľa potreby a probujeme znovu deliť. AB je polovica z AC, čo označujeme nakrátce takto: $AB = \frac{1}{2} AC$.

Rozdelíme-li opätne, ako polovicu AB, tak i polovicu BC, zas na dve rovné časti, rozpadne sa celá prímka AC na 4 rovné časti či na štvrtiny; rozdelíme-li opätne ako predtým, každú štvrtinu na dve rovné časti, obdržíme osminy prímky AC. Týmto spôsobom ďalej pokračujúc, možno prímku AC na 16, 32, atď. čiastok rozdeliť.

Úlohy. 1. Nakresli 10 *cm* dlhú prímku a rozdel' ju na 2, 4, 8 rovných čiastok! Ako to prevedieš na millimetre podeleným metrom!

2. Nakresli ľubovoľnodlhú prímku AC a rozdel' ju, dľa oka, kružidlom na: 2, 4, 8 rovných čiastok.

Chceme-li nejakú prímku AD (*obr. 31.*) na tri rovné časti rozdeliť, vyhľadáme na nej, kružidlom, také dva body B a C, ktoré ako jeden od druhého tak i od oboch koncov A a D rovno ďaleko nachodia sa. Ležia-li body B a C ako jeden od druhého tak i od im najbližších konečných bodov A a D rovno ďaleko, vtedy je AB tretia časť či tretina z AD či $AB = \frac{1}{3} AD$.



Obr. 31.

Rozdelíme-li každú tretinu prímky AD opätne na tri rovné časti, obdržíme ***deväťiny*** prímky AD a rozdelíme každú tretinu prímky AD na polovice, obdržíme ***šestiny*** tejže prímky.

Týmto spôsobom t. j. probovaním možno nejakú prímku i na iný počet rovných čiastok rozdeliť.

Iné spôsoby delenia prímok, na viac rovných čiastok, vysvetlíme neskoršie na patričnom mieste.

Úlohy k počtovaniu. 1. Štyri brvná majú jedno po druhom nasledujúce dĺžky: 10 *m* 80 *cm*, 12 *m* 10 *cm*, 15 *m* 40 *km* a 11 *m* 50 *cm*; koľko majú všetky štyri dovedna? Odp. 49·80 *m*.

2. Výška nejakej veže až po prvú dutinu obnáša: 46 *m* 70 *cm*; výška prvej dutiny i s trnácom 18 *m* 40 *cm*; výška druhej dutiny

i s druhým trnácom 9 *m* 60 *cm*; výška gule a kríža 4 *m* 20 *cm*; koľká je celá väža? Odp. 88·90 *m*.

3. Výška nejakého domu od zeme až po hrebeň je 24·80 *m*; jestliže sám múr, od zeme až po strechu má 19·60 *m* koľko metrov pripadne na výšku dachu? Odp. 24·80 — 19·60 = 5·20 *m*.

4. V istom dome na jedno poschodie majú schody 18 schodíkov; jestli každý schodík je 0·28 *m* vysoký, koľko *m* vysoké sú celé schody?

Odp. 18 × 0·28 *m* či 5·04 *m*.

5. Niekto chce obiť svoju zahradu lajsničkami 1 *m* 60 *cm* vysokými, jestliže celý obvod otáznej zahrady 156 *m* obnáša, z čoho na stĺpy vypadne 5 *m* 20 *cm* a jestliže na každý meter ostatnej dĺžky 5 lajsničiek potrebuje; koľko celých lajsán po 5 *m* dlhých bude k tomu potrebovať.

Rozlúšt. Poneváč z celého obvodu otáznej zahrady vypadne na stĺpy 5·20 *m*, obnáša ostatnia obiť sa majúca dĺžka 156 *m* — 5·20 *m* či 150·80 a poneváč na každý *m* poslednej dĺžky 5 lajsničiek potrebuje, tak na 150·80 *m*, bude 150·80 × 5 či 754 lajsničiek potrebovať. Keďže ale dĺžka jednej lajsničky je 1 *m* 60 *cm*, tedy na každé tri potrebuje 1 lajsňu, na 754 lajsničiek ale toľko lajsán, koľkokráť 3 v 754 nachodia sa čo učiní 251 lajsán.

6. Šírka nejakého dachu obnáša 18·40 *m* a dĺžka 28·60 *m* jestliže otázny dach po jednej širine a po jednej zdlžine opatríme blachovými rynkami, ktorých každý meter stojí 2 kor. 40 hal. či babiek; koľko bude stáť celá práca?

Rozl. Obe rynky sú 18·40 *m* + 28·60 *m* či 47 *m* dlhé. Poneváč ale 1 *m* stojí 2 kor. 40 hal. bab., tedy 47 *m* stojí 47 × 2.40 = 112.80 kor.

7. Hore nejakým vrškom vystupuje kiarovito 5 *km* 400 *m* dlhá cesta; jestliže jej strmosť na každých 100 *m* obnáša 0·80 *m*; koľko metrov má otázny vrch, počnúc od jeho úpätia až po vrchol?

Rozl. Poneváč otázna cesta na každých 100 *m* 0·80 *m* vystupuje, tedy jeho výška musí toľkokráť 0·80 *m* obnášať, koľkokráť 100 *m* v 5 *km* 400 *m* nachodí sa. Poneváč 100 *m* v 5400 *m* 54 kráť nachodí sa, obnáša celá výška otázneho vršku 54 × 0·80 či 43·20 *m*.

Nejaká obec chce svoju 8 *km* 560 *m* dlhú cestu štrkom vysypať, koľko vozov treba na celú cestu, jestli na každých 25 *dm* otáznej cesty jeden voz vysype sa?

Roz. Toľko vozov, koľkokráť 2·5 *m* v 8560 *m* nachodia sa či 3424 vozov.

9. Pri stavbe nejakého dreveného domu platil majiteľ od kresania a viazania každých 10 *m* 4.80 kor.; koľko stála celá táto práca, jestli zdĺžka všetkého okresaného a poviazaného dreva je 260·80 *m* a koľko platil za drevo, jestli každých 10 *m* stálo 3 kor. 60 halierov?

Rozl. Za prácu platil toľkokráť 4 kor. 80 hal. koľkokráť 10 *m* v 260·80 nachodí sa. Poneváč 10 *m* v 260·80 nachodí sa 26.08krát, tedy platil 26·08 × 4·80 či 125.18 kor.

Za drevo platil toľkokrát, 3.60 kor. koľkokrát 10 v 260·80 *m* nachodí sa. Poneváč 10 v 260·80 *m* nachodí sa 26·08-krát, tedy platil 26·08 × 3.60 či 93.88 kor.

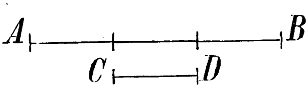
10. Koľko klátikov, po 0·80 *m* možno z 15·20 *m* dlhébo dreva odrezať?

Rozl· Toľko, koľkokrát 0·80 v 15·20 nachodí sa či 19.

§ 7. O vyhľadávaní pomeru dvoch prímok jednej k druhej.

Častokrát porovnávame dve prímky jednu s druhou a vyhľadávame takzvaný *pomer* jednej k druhej, či koľkokrát je jedna z nich na pr. prvá väčšia alebo menšia nežli druhá. Chceme-li avšak dve prímky jednu s druhou takto porovnať, musíme jednu druhou, obyčajne väčšiu menšou, alebo obe nejakou spoločnou mierou pomerať. Z takéhoto pomerania vysvitne potom, koľkokrát je jedna z nich väčšia alebo menšia než druhá či takzvaný pomer jednej k druhej.

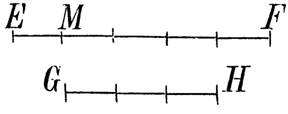
Tak na pr. pomer prímky *AB* k *CD* či koľkokrát je prímka *AB* väčšia než prímka *CD* vyhľadáme, jestli prímku *AB* prímkou *CD* premeriame. (*Obr. 32.*). A poneváč prímka *CD* v prímke *AB* trikrát nachodí sa, preto je prímka *AB* trikrát väčšia nežli *CD*; toto je ich *pomer* jednej k druhej.



Obr. 32.

Cieľom ľahšieho prehľadu označujeme tento pomer dvoch prímok jednej k druhej číslami. Poneváč prímka *CD* sama v sebe či *CD* v *CD* nachodí sa jedenkrát, preto miesto prímky *CD* môžme vziať číslo 1. A poneváč prímka *CD* v prímke *AB* nachodí sa 3-krát, preto miesto prímky *AB* môžme vziať číslo 3. Dľa tohoto prímka *AB* stojí v tom istom pomere k prímke *CD*, ako číslo 3 k 1. Tento číslový pomer 3 k 1 označujeme na krátce takto 3 : 1 (čítaj tri k jednemu). Prímka *AB* stojí tedy v tom pomere k prímke *CD* ako 3 : 1.

Taktiež pomer dvoch prímok jednej k druhej vyhľadáme, jestli obe nejakou spoločnou mierou premeriame. Známe-li na pr. (*Obr. 33*) že primka *EM* nachodí sa v *EF* prímke 5-krát a v *GH* prímke 3-krát, tedy stojí prímka *EF* k prímke *GH* v tom istom pomere, ako číslo 5 ku 3 či 5 : 3. — V tomto prípade je spoločná miera oboch prímok prímka *EM*,



Obr. 33.

Spoločnú mieru dvoch prímok i tak najdeme, jestli obe známe prímky metrom premeriame a obdržané dĺžky v rovnopomenovaných číslach vyslovíme. Má-li na pr. nejaká prímka 8 *cm* a druhá 3 *cm*, tedy stoja v tom pomere jedna k druhej ako 8 : 3 (8 ku 3). Podobne 18 *cm* dlhá prímka stojí v tom pomere k 4 *m* dlhej prímke ako 18 : 400. V oboch týchto príkladoch je spoločná miera 1 *cm*.

Úlohy. 1. Nakresli 3 *dm* 4 *cm* a 7 *cm* dlhé prímky a vyslov ich pomer v číslach. Odp. 34 : 7.

V akom pomere stojí: *a*) 1 *m* k 1 *cm*? *b*) 4 *m* k 14 *dm*? *c*) 1 *dm* k 1 *mm*? *d*) 1 *km* k 1 *m*? (Odp. *a*) 100 : 1 *b*) 40 : 14 *c*) 100 : 1 *d*) 1000 : 1.).

Ktoré dve dĺžky stoja v tom pomere jedna ku druhej ako: *a*) 2 : 1? *b*) 4 : 1? *c*) 3 : 2? *d*) 10 : 6? (Odp. *a*) 10 *m* k 5 *m* alebo 10 *cm* k 5 *cm* — *b*) 4 *dm* k 1 *dm* alebo 4 *m* k 1 *m* — *c*) 3 *cm* k 2 *cm* atď.

2. Nakresli dve ľubovoľnodlhé prímky a odrež ľubovoľným otvorom kružidla z prvej 5 a z druhej 3 rovné kusy. V akom pomere stoja odrezané kusy oboch prímok jeden k druhému? Odp. Ako 5 : 3. Jestli nejaká prímka je 5-kráť toľká ako druhá, v akom pomere stoja jedna k druhej? Odp. Ako 5 : 1.

3. Nakresli dve prímky, ktoré stoja v tom pomere jedna k duhej, ako: 4 : 5! 3 : 2! 8 : 3! 12 : 7!

Konečne spoločnú mieru dvoch prímok na pr. prímky AB a CD ešte i tak vyhľadáme, jestli menšou prímkou či s CD tamtú väčšiu AB premeriame.*) (*Obr. 34.*) Tak na pr. prímka CD v prímke AB nachodí sa 3-kráť a zvýši zbytok EB. Poneváč CD v AB bez zbytku nenachodí sa, preto CD nenie spoločná ich miera. V tomto prípade vezmeme do kružidla zbytok EB a oprobujeme, či tento v oboch prímkach nenachodí sa. EB v CD nachodí sa 2-kráť a zvýši FD. Poneváč EB v CD bez zbytku nenachodí sa, preto EB ani v AB nemôže celokráť nachodiť sa, bo $AB = 3CD + EB$. Dľa tohoto ani EB nenie spoločná miera otáznych dvoch prímok. V tomto prípade vezmeme do kružidla tento druhý zbytok FD a premeriame ním ten prvší zbytok EB. FD nachodí sa v EB 6-kráť a nezvýši nič. FD je spoločná miera oboch prímok, bo

Obr. 34.

$$EB = 6FD$$
$$CD = 2EB + FD = 2 \times 6FD + FD = 13FD$$
$$AB = 3CD + 6FD = 3 \times 13FD + 6FD = 45FD.$$

Spoločná miera FD nachodí sa v CD 13-kráť a v AB 45-kráť, preto stojí AB k CD v tom pomere ako 45 : 13.

Zvýši-li po premeraní prvého zbytku EB zbytkom FD ešte nejaký zbytok, premeriame posledným tamten prvší a zvýši-li i potom ešte nejaký zbytok, premeriame ním zas ten predchádzajúci.

*) Na obr. 34 u konca prvej prímky miesto ***D*** má stáť ***B***.

V tomto meraní zbytkov jeden druhým pokračujeme až dotiaľ, kým konečne, ako v našom príklade, nič nezvýši. Najposlednejší zbytok, ktorý v predchádzajúcom zbytku celokrát nachodí sa, je konečne spoločná miera oboch prímok.

Každý číslový pomer obsahuje v sebe dve čísla, ktoré jeho *údami* menujeme. Prvé z oboch čísel menujeme prvým a druhé druhým údom pomeru. Medzi oboma číslami stojí znak delenia či dva body preto, že každý pomer je vlastne naznačené delenie či naznačený podiel, v ktorom predný úd predstavuje delenca a zadný úd deliteľa. Delíme-li predný úd pomeru zadným údom, obdržíme takzvanú *hodnotu* pomeru. Tak na pr. hodnota pomeru 3 : 1 sú 3, bo 1 v 3 nachodí sa trikrát. Táto hodnota či vykladateľ (exponent) pomeru udáva: koľkokrát je prvý úd väčší alebo menší nežli druhý, či koľkokrát je prvšia prímka väčšia alebo menšia nežli druhá. Je-li hodnota pomeru číslo 3, tenkrát je prvý úd trikrát väčší a dľa toho je i prvá z prímok 3-krát väčšia než druhá, na pr. obr. 32.

Obsahuje-li nejaká prímka 8 a druhá 4 rovnaké čiastky, vtedy stoja v tom pomere jedna k druhej, ako 8 k 4 či 8 : 4. V tomto prípade je hodnota pomeru číslo 2, bo 4 v 8 nachodia sa 2-krát. Je-li ale hodnota pomeru číslo 2, tenkrát je prvá prímka 2-krát väčšia než druhá.

Podobne v pomere 2 : 3 hodnota pomeru sú $^2/_3$ a v pomere 7 : 3 je hodnota pomeru $^7/_3$ atď.

Hodnotu nejakého pomeru píšeme nad jeho deliace body, takto:

$$3 \overset{3}{\smile}{:}\, 1,\quad 8 \overset{2}{\smile}{:}\, 4;\quad 3 \overset{3/4}{:} 4 \text{ atď.}$$

V poslednom z týchto pomerov, je predný úd $^3/_4$-nokrát toľký ako zadný úd.

Poneváč pomery sú naznačené podiely (naznačené delenie) a poneváč hodnota podielu nezmení sa, jestli ako delenca tak i deliteľa jedným a tým ištým číslom delíme alebo násobíme, preto *i pomery* t. j. *oba ich údy jedným a tým istým číslom možno deliť alebo násobiť, bez toho, žeby ich hodnota zmenila sa.* Na základe tohoto pravidla možno vo veľkých číslach udané pomery zjednodušiť t. j. v menších číslach vysloviť, a v obecných zlomkoch vyslovené pomery zas v celých číslach vyobraziť.

Tak na pr. miesto pomeru 18 : 6 možno 9 : 3, alebo 3 : 1 a podobne miesto pomeru 100 : 25 možno 20 : 5 alebo 4 : 1 napísať. V prvom z týchto príkladov delili sme oba údy najprv 2-ma, potom 3-mi, v druhom príklade zas 5-mi.

Taktiež, miesto pomeru $^2/_3$: 4, možno vziať 2 : 12 (oba údy násobili sme 3-mi); miesto 7 : $^3/_5$ ale 35 : 3 (oba údy násobily sme 5-mi atď.

V hor udaných príkladoch (*Obr. 32. a 33.*) vyslovené vety, že na pr. prímka *AB* stojí v tom pomere ku prímke *CD* ako 3 : 1, a že prímka *EF* stojí v pomere k prímke *GH* ako 5 : 3 možno i takto nakrátce označiť:

AB : *CD* = 3 : 1 čítaj: prímka *AB* stojí v tom pomere ku prímke *CD* ako 3 : 1.

EF : *GH* = 5 : 3 čítaj: prímka *EF* stojí v tom pomere ku prímke *GH*, ako 5 : 3.

Každé z týchto dvoch označení, obsahuje v sebe dva pomery, z ktorých prvý je pomer prímok a druhý je pomer im zodpovedajúcich čísel. A poneváč oba tieto pomery majú rovnú hodnotu, preto nachodí sa medzi nimi znak rovnosti či =. Z tohoto vyplýva, že dva rovné pomery možno znakom rovnosti jeden s druhým spojiť. Takto spojené pomery, tvoria takzvanú *srovnalosť* čili *proporciu* alebo *pomeropár*. Horudané označenia sú tedy dve proporcie alebo dva *pomeropáry*.

§ 8. O kreslení prímok dľa zmenšeného merťuchu.

Na poli alebo v zahrade vymerané prímky nekreslíme v ich skutočnej veľkosti, ale dľa zmenšenej miery či v zmenšenom spôsobe. Pravdaže toto zmenšovanie prímok deje sa dľa istého, vopred ustáleného pomeru. Tak na pr. nejakú na svobode vymeranú prímku možno v pomere 10 : 1 či 10-kráť zmenšeno na papieri nakresliť atď. Toto zmenšovanie prímok deje sa na základe takzvaného *zmenšeného merťuchu*. Za takýto merťuch možno už i samú, na svoje podčiastky podelenú metrovú týčku či meter upotrebiť. Tak na pr. vezmeme-li miesto skutočne obdržaných celých metrov, decimetre; potom, miesto skutočne obdržaných celých decimetrov, centimetre a miesto skutočne obdržaných celých centimetrov, millimetre, bude každá prímka 10-kráť menšia na papieri, nežli v skutočnosti. V tomto prípade každá na svobode vymeraná prímka stojí k jej zodpovedajúcej na papieri, v tom pomere ako 10 : 1. Dľa tohoto pomeru, zodpovedá na pr. v skutočnosti 5 *m* dlhej prímke 5 *dm*, a v skutočnosti 8 *cm* dlhej prímke 8 *mm* veľká prímka na papieri.

Úlohy. 1. Nakresli na papieri, 10-kráť zmenšeno: 1 *m!* 3 *dm!* 15 *cm!* dlhú prímku.

Ktorá dĺžka je 10-kráť menšia nežli 1 *m?* nežli 3 *dm?* nežli 15 *cm?*

Ktoré podčiastky metra sú 10-kráť menšie: nežli desatiny metra? nežli desatiny decimetra? nežli desatiny centimetra?

2. Nejaká prímka má v skutočnosti: *a*) 8 *m* 46 *cm*, *b*) 3 *m* 4 *dm*, *c*) 2 *dm* 5 *cm*; nakresli im zodpovedajúce na papieri, dľa pomeru 10 : 1.

Koľkokráť musíme, dľa tohoto pomeru, jednej každej dĺžku zmenšiť?

Koľko je 10 časť *a*) z 3 *m* 4 *dm?* Odp. 3 *dm* 4 *cm*, *b*) z 2 *dm* 5 *cm* (Odp. 2 *cm* 5 *mm*) *c*) z 8 *m* 46 *cm* (Odp. 8 *dm* 46 *mm*).

Poneváč každá dľa tohoto pomeru či 10 : 1 zmenšená prímka je na papieri desaťkrát menšia než v skutočnosti, preto, koľko má v skutočnosti metrov, toľko musí mať na papieri decimetrov; podobne, koľko má v skutočnosti decimetrov, toľko musí mať na papieri centimetrov atď.

A naopak, poneváč každá dľa tohoto pomeru nakreslená prímka je v skutočnosti 10-krát väčšia než na papieri, preto koľko má na papieri decimetrov, toľko musí mať v skutočnosti metrov; podobne, koľko má na papieri centimetrov, toľko musí mať v skutočnosti decimetrov atď.

Úlohy. 1. Nakresli tri ľubovoľnodlhé prímky a vyhľadaj, koľká dĺžka zodpovedá im dľa tohoto pomeru či 10 : 1, v skutočnosti či na slobode!

Koľko metrov zodpovedá dľa tohoto pomeru, 3 *dm* veľkej prímke v skutočnosti? (Odp. 3 *m*); koľko decimetrov 35 *cm* veľkej prímke? (Odp. 3 *m* 5 *dm*) a koľko *cm*-trov 18 *mm*-om? (Odp. 18 *cm*).

Koľkokrát je každá z týchto prímok väčšia v skutočnosti nežli na papieri? a koľkokrát menšia na papieri nežli v skutočnosti?

Ktorým číslom musíme na papieri vymeranú prímku násobiť, aby sme jej zodpovedajúcu skutočnú dĺžku obdržali? A ktorým číslom musíme každú skutočnú dĺžku deliť, aby sme vynašli jej na papieri zodpovedajúcu?

Vezmeme-li miesto skutočne či na slobode obdržaných každých 100 *m* na papieri 1 meter; ďalej, miesto skutočne obdržaných *dm*-trov na papieri millimetre, bude každá prímka na papieri 100-krát menšia nežli v skutočnosti či každá na svobode vymeraná prímka bude k jej na papieri zodpovedajúcej stáť v tom pomere, ako 100 : 1.

Tohoto spôsobu merťuch zmenšuje každú v skutočnosti vymeranú prímku, t. j. jej zodpovedajúcu dĺžku 100-krát. Dľa tohoto merťuchu na pr. 254 *m*-om v skutočnosti zodpovedá na papieri 100-krát menšia dĺžka či 2·54 *m* či 2 *m* 54 *cm*; podobne v skutočnosti vymeraným 35 *cm*-om zodpovedá na papieri 100-tá časť z 35 *cm* či 0·35 *cm*, či 3·5 *mm*; 2 *cm*-om zodpovedá na papieri 100-tá časť z 2 *cm* či 0·02 *cm* či 0·2 *mm*-tra.

A naopak, 8 *cm* veľkej dĺžke na papieri, zodpovedá v skutočnosti 100 $\times$ 8 *cm* či 8 *m*; 24 *cm*-om na papieri, zodpovedá v skutočnosti 100 $\times$ 24 *cm* či 2400 *cm* alebo 24 *m*; 16 *mm*-om na papieri, zodpovedá v skutočnosti 100 $\times$ 16 *mm* či 1600 *mm* či 1 *m* 60 *cm* atď.

Chceme-li nejakú prímku dľa tohoto pomeru či 100 : 1 zmenšiť, musíme ju 100-mi deliť, a chceme-li nejakú prímku dľa tohoto pomeru zväčšiť, musíme ju 100-mi násobiť.

Ulohy. 1. Nakresli 100-krát zmenšeno: 54 *m*, 8 *m*, 40 *cm*, 70 *cm* dlhé prímky!

Ktorá dĺžka je 100-krát menšia: nežli 54 *m*? (Odp. 0·54 *m*) a nežli 8 *m* 40 *cm*? (Odp. 0·084 *m*). Ktorým číslom musíme každú z týchto dĺžok deliť?

2. Nakresli ľubovoľnodlhú prímku na papieri a vyhľadaj koľká dĺžka zodpovedá jej v skutočnosti dľa tohoto pomeru!

Koľkokráť, v tomto prípade, musíme jej dĺžku zväčšiť či násobiť?

Podobne, miesto v skutočnosti vymeraných, každých 1000 *m*-ov, možno na papieri 1 *m* načiarať t. j. každú v skutočnosti vymeranú prímku 1000-kráť zmenšeno či v tom pomere ako 1000 : 1 nakresliť.

O mnoho. zmenšenejšie ešte merťuchy obdržíme, jestli miesto skutočných 10000 *m* na papieri 1 *m*, alebo miesto skutočných 100000 *m* na papieri 1 *m* načiarame. Pravdaže, upotrebením týchto posledných merťuchov, podčiastky metra už nemožno nakresliť.

Za základnú jednotku zmenšeného merťuchu, možno nielen meter, ale i nejakú inú ľubovoľnodlhú prímku na pr. *AB* upotrebiť. *Obr. 35.*

Obr. 35.

Znamená-li prímka *AB* na pr. 10 *m*, tedy 2-kráť *AB* či *AC* znamená 20 *m*; 3-kráť *AB* znamená 30 *m* atď. A poneváč *A* 10 je toľká prímka ako *AB*, tedy jej čiastka *A*1 znamená 1 *m*, *A*2 znamená 2 *m*, *A*3 znamená 3 *m* atď.

Dľa tohoto merťuchu v skutočnosti vymeraným 10 *m*-om, zodpovedá na papieri prímka *AB*: v skutočnosti vymeraným 2 *m*, zodpovedá na papieri 2-kráť *AB* atď.; v skutočnosti vymeranému 1 *m*, zodpovedá na papieri prímka *A*1; v skutočnosti vymeraným 2 *m*, zodpovená prímka *A*2; v skutočnosti vymeraným 27 *m*, zodpovedá na papieri *AC* + *A*7 či *C*7 prímka; v skutočnosti vymeranému 1 *dm*-tru zodpovedá 10-ta časť z *A*1, a v skutočnosti vymeranému 1 *cm* zodpovedá 100-ta časť z *A*1. Posledné ťieto dĺžky či desatiny a stotiny metra, by sme už, dľa tohoto merťuchu, nemohli na papieri nakresliť.

Ulohy. 1. Nakresli dľa tohoto merťuchu na papieri: *a)* 30 *m* *b)* 46 *m* *c)* 54 *m* dlhé prímky!

Rozl. *a)* Vezmem do kružidla 3-kráť *AB* a odrežem túto dĺžku z ľubovolnej prímky.

b) Vezmem do kružidla 4-kráť *AB* a *A*6, a odrežem obe tieto dĺžky z ľubovolnej prímky.

c) Vezmem do kružidla 5-kráť *AB* a k tomu pridám *A*4 atď.

2. Nakresli na tabuli alebo na papieri jedno pod druhé viac prímok a vyhľadaj koľko metrov zodpovedá jednej každej v skutočnosti dľa tohoto merťuchu.

Rozl. Vezmeme do kružidla *AB* a vyhľadáme, koľkokráť je táto dĺžka v niektorej z nakreslených prímok obsažená. Koľkokráť totiž *AB* v otáznej prímke sa nachodí, toľkokráť 10 *m*, a koľkokráť *A*1 v jej zbytku nachodí sa — jestli totiž *AB* v nej celokráť nenachodí sa — toľkokráť ešte i 1 *m* zodpovedá jej v skutočnosti.

Chceme-li vyhľadať, koľkokráť tento na obr. 35 znázornený merťuch zmenšuje, či v akom pomere stojí *AB* k 10 *m* alebo 10 *m* k *AB*, musíme obe prímky spoločnou mierou premerať. Jestliže *AB* obnáša na pr. 2 *cm*, tenkráť stojí 10 *m* k *AB* v tom pomere, ako 1000 : 2, či 500 : 1; bo 10 *m* je 1000 *cm* a *AB* sú 2 *cm*. V tomto prípade zmenšuje otázny merťuch 500-kráť.

Dľa zmenšeného merťuchu kreslíme: nákresy domu, zahrád, dvora, chotárne mapy, zemevidy atď.

Chotárne mapy shotovujeme dľa pomeru 2000 : 1, alebo 4000 : 1; zemevidy dľa pomeru 500000 : 1, áno i dľa pomeru 2,000000 : 1, 44,000000 : 1 atď.

Na každom nákrese, chotárnej mape alebo zemevide nachodí sa i poťažný zmenšený merťuch, dľa ktorého sú kreslené. Na základe tohoto merťuchu možno skutočnú rovnú dialku dvoch miest, jedneho od druhého kružidlom vyhľadať. Zabodneme-li do kolečka, nejaké mesto alebo dedinu označujúceho, jedno rameno a do kolečka, nejaké druhé mesto označujúceho, druhé rameno kružidla, a prenesiemeli tento otvor ramien na zmenšený merťuch, vyzvieme ich rovnú vzdialenosť v míľach alebo kilometroch. — Skutočná či rovná dialka, dvoch, na zemevide nachádzajúcich sa miest alebo dedín je toľkokráť väčšia od tej na zemevide, koľkokráť poťažný merťuch zmenšuje. Zmenšuje-li 400000-kráť, tedy je skutočná rovná dialka 400000-kráť väčšia nežli tá na zemevide.

§ 9. O kruhovej čiare či o kružnici.

Medzi krivými čiarami je najznámejšia a v praktičnom živote najvýznamnejšia, takzvaná *kruhová čiara či kružnica*, akú na pr. ráf na kolese alebo obruč na sude znázorňuje. Čiara táto povstane, jestli sa *nejaký pohyblivý bod okolo druhého nepohyblivého či stáleho bodu, vždy v jednej a tej istej dialke pobybuje*. Tamten predošlý opíše potom zvláštnu, do seba uzavretú čiaru, takzvanú kružnicu.

Spôsob tento povstania kružnice možno si pomocou niti znázorniť, na jejžto jednom konci je ihla a na druhom ostro ostrúhaná tužka pripevnená. Zabodneme-li takúto ihlu do vodorovne ležiaceho papieru a vypnúc niť do prosta čiarame tužkou kolo nej, opíše ostrúhaný koniec tužky zvláštnu do seba uzavretú čiaru, či hor menovanú kružnicu.

Do papieru zabodnutá ihla predstavuje pevný, koniec tužky pohyblivý bod, a tužku s ihlou spojujúca niť otáznu rovnú dialku. *Obr. 36.*

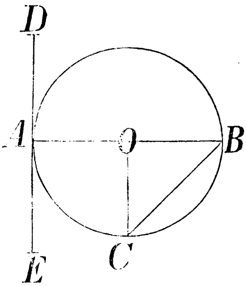
Ku kresleniu kruhovej čiery v zahradách, upotrebujeme miesto niti šnúru a miesto ihly a tužky zaostrené kolky. Krútime-li do tuha vypnutú šnúru, kolo jedneho z kolkov, (pevný bod) opíše druhý (pohyblivý bod) na zemi kružnicu. *Obr. 37.*

Na papieri kreslíme kružnicu *kružidlom* (cirklom), pri čom jedno z ramien zabodneme do papieru a druhým čiarame vôkol neho, pilne na to pozorujúc, aby prvotný otvor ramien nezmenil sa.

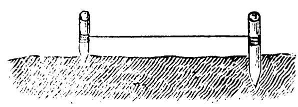
Zo všetkého tu povedaného vyplýva, že *kružnica je taká do seba uzavretá krivá čiara, ktorej všetky body, v rovnej dialke od istého v jej nútri ležiaceho bodu, nachodia sa.* Tento bod menujeme *stredobodom*, preto, že leží v stredu celého kružnicou uzavretého kruhu.

Spojíme-li niektorý bod kružnice so stredobodom kruhu prímkou, obdržíme takzvaný *polmer* (radius) kruhu *OB*, alebo *AO*. *(Obr. 36).*

Dva body kružnice spojujúca a cez stredobod kruhu idúca prímka, je takzvaný *priemer* kruhu (diameter) *(Obr. 36) AB.*



Obr. 36.



Obr. 37.

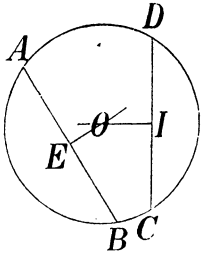
Poneváč u jedneho a toho istého kruhu všetky body kružnice ležia od stredobodu rovno ďaleko, preto i všetky, stredobod s kružnicou spojujúce prímky či polmery sú rovnodlhé. A poneváč každý priemer, jednoho a toho istého kruhu, je dvakráť toľký, ako polmer, preto sú i všetky priemery jedneho a toho istého kruhu rovnaké. Každý priemer delí patričnú kružnicu na dve rovné časti či poltí ju.

Akokoľvek veľkú či malú časť kružnice, na pr. *AC, BC, AB* menujeme *oblukom,* a oba konce obluku, jeden s druhým, spojujúcu prímku *tetivou* (chorda). Polkruhu zodpovedajúca tetiva je toľká ako priemer.

Obluk znázorňuje kosák či srp, ktorým vykášame a obluk s tetivou zas kuša, ktorou strielame. Vnútorná strana obluku a podobne i srpu, je poddutá (konkav) a zovnútorná zas vydutá či vypuklá (convex).

Postavíme-li v konečnom bode nejakého polmeru na tento kolmú, obdržíme takzvanú *tečnicu* (tangente) *DE (Obr. 36).*

Tečnica dotýka sa kruhu len v jednom bode na pr. tečnica *DE* kruhu *O* v *A*, ostatné jej body ležia von z kruhu, odtiaľ i jej meno.



Obr. 38

Pomocou tetív vyhľadávame stredobod kruhu jestli je neznámy, tak, že nakreslíme dve ľubovoľné tetivy na pr. AB a DC (*Obr. 38*) rozdelíme každú na dve rovné časti a v deliacich bodoch (E a I) postavíme kolmé EO a IO; bod ten, v ktorom sa režú, je hľadaný stredobod kruhu. Týmto spôsobom hľadáme na pr. stredobod dna na sude.

Nakreslíme-li z jedneho a toho istého stredobodu viac kruhov rozlične polmery majúcich, na pr. prvý s polmerom 2 *cm*, druhý s polmerom 3 *cm*, tretí s polmerom 4 *cm* veľkým, obdržíme takzvané ***sústredné*** (koncentrické) kruhy. Sústredné kruhy majú spoločný stredobod. Takéto kruhy povstávajú na hladine stácej vody, keď do nej kameň hodíme.

Úlohy. 1. Nakresli kruh, jehož polmer má 3 *cm* a druhý, jehož polmer má 5 *cm!*

Aká čiara je kruhová čiara či kružnica? — *Ako* povstáva kružnica? — *Prečo* menujeme pevný či stály bod *stredobodom* kruhu? Čo rozumieme pod polmerom kruhu? — *Koľkoraké* polmery má jeden a ten istý kruh? — *Ktorý* z nakreslených dvoch kruhov je väčší? — *Od čoho* závisí veľkosť kružnice?

2. Nakresli ľubovoľnoveľký kruh a doň dva, jeden na druhom kolmo stojace priemery!

Čo rozumieme pod priemerom kruhu? — *Cez* ktorý bod kruhu musí isť každý priemer? *V ktorom* bode režú sa všetky priemery? *Koľkokrát* je priemer kruhu dlhší nežli jeho polmer? — *Na* koľko a jaké čiastky delí priemer kruh? a kružnicu?

Keď priemer nejakého kruhu je 8 *cm* dlhý, koľký je jeho polmer?

3. Nakresli kružidlom obluk, s otvorom ramien, 5 *cm* veľikým!

Ako ďaleko ležia všetky body tohoto obluku od pevného bodu O, z ktorého sme ho čiarali? (Odp. 5 *cm* ďaleko).

4. Nakresli viac bodov, ktoré všetky od jedneho známeho bodu O, 6 *cm* ďaleko ležia!

Rozl. Najprv nakreslím pevný či stály bod O a potom opíšem z neho obluk otvorom kružidla 6 *cm* veľikým.

Ako ďaleko leží každý bod tohoto obluku od pevného bodu O, z ktorého sme čiarali?

5. Nakresli viac bodov, z ktorých jedny nech ležia 3 *cm*, druhé 5 *cm* a tretie 7 *cm* daleko, od istého známeho bodu O!

Rozl. Z daného bodu O opíšem tri obluky, otvorom ramien 3 *cm*, 5 *cm* a 7 *cm* veľikým.

6. Nakresli ľubovoľný kruh a spoj dva ľubovoľné jeho body jeden s druhým prímkou!

Ako menujeme túto dva lubovoľné body kružnice jeden s druhým spojujúcu prímku? — Na koľko a jaké čiastky delí tetiva kružnicu? — *Ktorá* tetiva delí kruh na dve rovné čiastky?

*7. Načiaraj do nejakého kruhu polmer a v tom bode, kde sa kružnice dotýka, postav naň kolmú!

Ako menujeme v konečnom bode polmeru postavenú kolmú? — Prečo menujeme túto prímku tečnicou?

Koľko spoločných bodov má tečnica s kružnicou?

Akej polohy prímky predstavajú v koncobodoch jedneho a toho istého priemeru postavené tečnice? (Rovnobežné).

§ 10. O vymeriavaní obvodu kruhu či kružnice.

Obvod kruhu či kružnicu možno ako prímku vymerať. Tak na pr. obvod kolesa alebo mlynského kameňa vyhľadáme, jestli ho zôkol vôkol niťou ovinieme a tento jeho obvodu zodpovedajúci kus niti metrom vymeriame. Tohoto spôsobu meranie kružnice je však len veľmi zriedka možné. Tak na pr. na papieri nakreslenú kružnicu nemožno takto či ovinutím niti vymerať. V tomto a podobných prípadoch musíme obvod kruhu vypočítať. Toto vypočítanie kružnice zakladá sa na nasledújúcej poučke:

Otočíme-li okolo nejakého kolesa niť alebo šnúru a premeriame-li tento, jeho obvodu zodpovedajúci kus niti jeho priemerom, zkúsime, že tento posledný v obvode 3 a $^1/_7$-kráť nachodí sa.

Meranie toto priemerom ešte snadnejšie prevedieme, jestli do kolesa, do jeho obvodu, na hor trčiaci klinček zabijeme a ho potom po mełkej a rovnej zemi raz, dva skrutíme. Na mieste tom kade sa koleso krútilo, povstane koľaj s jaminami klinčekom vybitými. Dĺžka kolaje od jednej k druhej jamine predstavuje obvod kolesa, ktorý potom jeho priemerom premeriame. Akékoľvek koleso k tomuto cieľu upotrebíme, po vymeraní obvodu priemerom vždy jedno a to isté číslo: $3^1/_7$ do podielu obdržíme. Dľa tohoto je kružnica či obvod nejakého kruhu $3^1/_7$-kráť toľký ako jeho priemer.

Cieľom ľahšieho počtovania vyslovujeme obecný zlomok $^1/_7$ v decimálkach, a preto miesto čísla $3^1/_7$ berieme do počtov 3·14.

Zo všetkého tu povedaného vyplýva, že *obvod kruhu je* 3·14-*kráť toľký ako jeho priemer*, a že následkom tohoto obvod *kruhu najdeme, jestli jeho priemer* 3·14-mi *násobíme.*

Obvod kruhu či kružnica je tedy násobok *z priemeru* a *čísla* 3·14 či

Obvod kruhu = priemer $\times$ 3·14.

Obvod kruhu menujú učenci *peripheriou kruhu* a označujú na krátce literou *p*. Označíme-li obvod kruhu takto, či literou *p*, a priemer či diameter kruhu literou d, obdržíme miesto predošlej nasledujúcu, všeobecnú formulku k vypočítaniu obvodu kruhu:

$$p = d \times 3{\cdot}14.$$

Stále číslo 3.14 označujú učenci réckou literou π (čítaj *pi*) a preto píšu túto formulku ešte i nasledovne

$$p = d \times \pi.$$

Obnáša-li priemer či d nejakého kruhu 2 *dm*, tedy je jeho

Obvod = 2 $\times$ 3.14 či 6.28 *dm*.

Poneváč je obvod 3.14-kráť väčší nežli priemer, preto i naopak, priemer je 3.14-kráť menší, nežli obvod. Z tohoto zas vyplýva, že *priemer nejakého kruhu najdeme, jestli jeho obvod číslom 3.14 delíme.*

Obnáša-li na pr. obvod nejakého kruhu 6.28 *dm*, tedy je jeho

priemer = 6.28 : 3.14 = 2 *dm*.

Vôbec: $d = p : 3.14$ alebo $d = \frac{p}{\pi}$ alebo $d = \frac{p}{3.14}$

V hor udanej formulke $p = d \times \pi$ možno miesto d diametra 2 r položiť, bo d je v skutku toľký, ako dva polmery. Následkom tohoto zmení sa hor udaná formulka na

$p = 2\, r\, \pi$ t. j.

Obvod kruhu rovná sa dvojnásobnému násobku z polmera a čísla 3.14.

Má-li na pr. polmer nejakého kruhu 3 *dm*, tedy je jeho obvod = 2 $\times$ 3 $\times$ π či 2 $\times$ 3 $\times$ 3.14 = 12.84 *dm*.

Ako horudaná formulka $p = d \times \pi$ ukazuje, je obvod kruhu toľký ako násobok činiteľov d a π, poneváč je ale π stále číslo, preto sa len d môže v ňom meniť. Z tohoto ale vyplýva, *že veľkosť kružnice či veľkosť obvodu nejakého kruhu závisí jedine od d či od veľkosti diametra.* Čím väčší je tedy priemer nejakého kruhu, tým väčší je jeho obvod a naopak.

Označíme-li priemer a polmer nejakého väčšieho kruhu literami D a R a druhého menšieho kruhu literami d a r, tedy je obvod prvého = $D\pi$ alebo $2R\pi$ a obvod druhého = $d\pi$ alebo $2r\pi$.

Srovnáme-li tieto periferie či obvody oboch kruhov jeden s druhým, najdeme, že P či obvod prvého kruhu stojí v tom pomere k p či k obvodu druhého kruhu, ako $D\pi : d\pi$ alebo ako $2R\pi : 2r\pi$ alebo ako $D : d$ alebo ako $R : r$.

$$P : p = D : d \quad P : p = R : r.$$

Z tohoto vyplýva, že *dva-, alebo trikrát väčšiemu priemeru alebo polmeru zodpovedá i dva-, alebo trikrát väčší kruhový obvod* a naopak, že dvakrát alebo trikrát väčšiemu kruhovému obvodu zodpovedá i dvakrát alebo trikrát väčší priemer alebo polmer atď.

Dľa tohoto, k nejakému známemu kruhu druhý, dvakráť väčší obvod majúci nakreslíme, jestli tento posledný dvakráť väčším polmerom opíšeme. Tak na pr. má-li priemer predných kolies na voze 0.80 *m* a chceme-li, aby zadné dvakráť väčšie boly, musí týchto priemer 2-kráť toľký byť či 2×0.80 t. j. 1.60 *m* obnášať.

Úlohy. 1. Nakresli kruh jehož priemer je 4 *cm* veľký!

Koľko cm-ov má tohoto kruhu obvod či kružnica?

Koľkokráť je obvod nejakého kruhu väčší, nežli jeho priemer? (Odp. 3.14-kráť) a koľkokráť je obvod kruhu väčší, nežli jeho polmer? Odp. 6.28-kráť. *Ktorým* číslom násobíme priemer kruhu, keď hľadáme jeho obvod? — *Ktorou* literou označujeme toto číslo? — Čo znamenajú nasledujúce formulky: $p = d \times \pi$, $p = 2\, r\, \pi$. Vyslov nimi označenú vetu slovami! Čo znamená litera p? a d? a r? a π?

2. Nakresli dva kruhy z nichž prvého priemer má 2 *cm* a druhý 6 *cm*!

Koľkokráť je obvod posledného kruhu väčší nežli prvého? — Prečo je obvod posledného kruhu trikráť väčší nežli prvého?

Koľkokráť je priemer prvého kruhu menší nežli druhého? a koľkokráť je obvod prvého kruhu menší nežli druhého?

3. Nakresli tri kruhy, íchžto obvody stoja v tom pomere jeden k druhému ako: 1 : 2 : 3.

Rozl. Ľubovoľným otvorom kružidla opíšem najprv jeden kruh; dvakráť toľkým otvorom opíšem druhý kruh; trikráť toľkým otvorom opíšem tretí kruh.

4. Vyhľadaj 3.14 *dm*-om veľkej kružnice zodpovedajúci priemer? (Odp. 1 *dm*) a 6.28 *cm* veľkej kružnice zodpovedajúci polmer? (Odp. 1 *cm*).

Ako vyhľadáme z obvodu kruhu jeho priemer? a jeho polmer? — Čo znamená nasledujúca formulka $d = \frac{p}{\pi}$ a $r = \frac{p}{2\,\pi}$?

Úlohy k počtovaniu. 1. Jestli priemer nejakého mlynského kolesa má 5 *m* 40 *cm*, koľký je jeho obvod? Odp. 5.40×3.14 či 16.965 *m*.

2. Koľko *m* ráfu treba na okovanie dvoch menších a dvoch väčších kolies, jestliže je priemer prvých 1.2 *m* a posledných 1.60 *m* veľký?

Rozl. Poneváč priemer menších kolies je 1.2 *m* veľký, preto učiní obvod jedneho z nich 3.14×1.2 *m* či 3.768 *m* a obvod oboch 2×3.768 *m* či 7.536 *m*.

Podobne, poneváč priemer väčších kolies je 1.60 *m* veľký, preto učiní obvod jedneho z nich 3.14×1.60 *m* či 5.024 *m*, a obvod oboch 2×5.024 *m* či 10.048 *m*. Dľa tohoto treba na všetky štyri 7.536 *m* + 10.048 *m* či 17.584 *m* ráfu.

3. Koľký priemer má kruh, jehož obvod je 18 *m* 84 *cm* veľký?

Rozl. Keďže je obvod 18.84 *m* veľký, musí priemer 18.84 : 3.14 či 6 *m* obnášať.

4. Vypočítaj najväčší priemer takého suda, jehož obvod na vranke má 3 *m* 58 *cm*.

Odp. 3.58 : 3.14 = 1.14 *m*.

5. Nejaké zubkovaté koleso má na svojom obvode 40 zubov, ktorých vzájomná dialka t. j. od stredu jedneho zubu po stred nasledujúceho druhého zubu (v obluku merajúc) je 5 *cm* veľká; koľký je jeho priemer?

Rozl. Ponevač dialka od jedneho zubu k druhému nasledujúcemu je 5 *cm* veľká, preto obnáša celý jeho obvod 40 × 5 *cm* či 200 *cm* alebo 2 *m* a následkom toho je jeho priemer 2 : 3.14 či 0.636 *m*.

6. Priemer nejakého kolesa je 1.40 *cm*, koľko zubov možno na jeho obvode vyrezať, jestli dialka jedneho zubu k druhému nasledujúcemu (v obluku merajúc) má 8 *cm* veľká byť?

Rozl. Ponevač je priemer 1.40 *m*, tedy je obvod 1.40 × 3.14 či 4.396 *m*, a ponevač obluková diaľka dvoch jeden po druhom nasledujúcich zubov je 8 *cm*, obnáša počet všetkých zubov 4.396 : 0.080 či takmer 55.

7. Nejaký klobúk má v obvode 40 *cm*, koľký je jeho priemer?
Odp. 0.40 : 3.14 = 0.127 *m*.

8. Koľkokrát skrúti sa koleso okolo svojej osi, na 4 *km* dlhej ceste, jestli jeho priemer má 1.80 *m*?

Rozl. Najprv vyhľadáme jeho obvod, ktorý je 1.80 × 3.14 *m* či 5.652 *m*. Otázne koleso skrúti sa okolo svojej osi toľkokrát, koľkokrát 5.652 v 4000 nachodí sa či 708-krát.

9. Nejaké koleso skrútilo sa 76-krát okolo svojej osi na 378.40 *m* dlhej ceste; koľký je jeho polmer?

Rozl. Najsamprv určíme jeho obvod. Ponevač otázne koleso na 378.80 *m* dlhej ceste 76-krát skrútilo sa, je jeho obvod 76-krát menší než celá cesta či 378.80 *m* : 76. A to je 4.984 *m*. Nasledovne je jeho priemer 4.984 : 3.14 či 1.587 *m* a polmer 0.7835 *m*.

10. Koľko *m* obnáša rovník našej zeme, keďže jej priemer u rovníka má 1719 geogr. míl a keď 1 geogr. míla má 7420.4 *m*.

A koľkú cestu vykoná nejaký bod na rovníku behom 1 vtoriny či sekundy.

Rozl. Ponevač priemer zeme je 1719 míl, činí jeho obvod 1719 × 3.14 míl či 5397.66 míl. V skutočnosti je tenže niečo dlhší a síce 5400 míl dlhý. Menší počet míl obdržali sme tu preto, že číslo 3.14 pomer priemeru k obvodu kruhu len priblíženo udáva. Násobíme-li 5400 míl 7.4204 *km*-mi, obdržíme 40,070.16 *km*. A to je obvod rovníka vyslovený v kilometroch.

Ponevač otázny bod na rovníku túto cestu za 24 hodín či za 86400 sekúnd vykoná, pripadne na 1 sekundu 40,070.150 : 86400 či asi 463 *m* 77 *cm*. Toľkouto rýchlosťou pohybuje sa otázny bod na rovníku.

11. Jestli priemer dna na nejakom sude má 1.20 *m* obnášať, koľko 10 *cm* širokých dúh budeme naň potrebovať?

Rozl. Poneváč priemer dna má mať 1.20 *m*, musí celý jeho obvod 3.14 × 1.20 či 3.768 *m* veľký byť. A poneváč jedna dúha je 10 *cm* široká, treba ich na celý sud toľko, koľkokrát 10 *cm* v 376.80 *cm* nachodí sa. Niečo vyše 37.

12. V dobre meliacom mlyne vykoná na obvode mlynského kolesa označený bod za jednu sekundu 8.20 *m*, za dve sekundy dvakrát toľko či 2 × 8.20 atď. za 60 sekund či za 1 minútu 60 × 8.20 či 492 *m*. Chceme-li, aby koleso túto poslednú cestu po 100 skrutoch vykonalo, koľký musí byť jeho priemer?

Rozl. Má-li otázne koleso po 100 skrutoch túto cestu vykonať, pripadne na jeden jeho skrut 100-tá časť z 492 *m* či 4.92 *m*. A preto toľkýto musí byť jeho obvod. Obnáša-li ale jeho obvod 4.92 *m*, tedy obnáša jeho priemer 4.92 : 3.14 či 1.566 *m*.

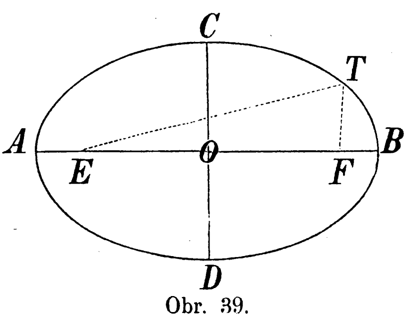
§. 11. O iných krivých čiarach.

Krem kružnice spomenutia zasluhuje ešte i takzvaná *schodnica* čili *ellipsa*, po prvé preto, že znázorňuje cestu zeme okolo slnca, ktorá má podobu schodnice, po druhé ale preto, že i v priemysle a hospodárstve veľmi často vyskytuje sa.

Schodnica povstáva, podobne ako kružnica, tiež dľa istého pravidla. Je tedy tiež pravidelná a ako kružnica do seba uzavretá krivá čiara, no nie tak vypuklá ako tamtá, lež niečo schodnejšia, odkiaľ i jej meno schodnica.

Schodnicu nakreslíme nasledovne:

Po najprv vytiahneme na papieri (alebo na zemi) ľubovoľnodlhú prímu čiaru vo vodorovnej polohe n. pr. *AB*. Na to označíme rovno ďaleko od jej oboch koncov dva body (*E*, *F*). V jednom z týchto bodov pripevníme jeden, a v druhom druhý koniec toľkej niti, koľká je vodorovná *AB*. Konečne vypneme otáznu niť na papieri tužkou *T* a čiarame jej ostrúhaným koncom zôkol vôkol oboch bodov *E* a *F*, pilne na to pozorujúc, aby otázna niť vždy vo vypnutom stave nachodila sa. Týmto spôsobom opíše tužka na papieri zvláštnu, krivú, do seba uzavretú čiaru, ktorej meno je ellipsa či schodnica. *(Obr. 39.)*

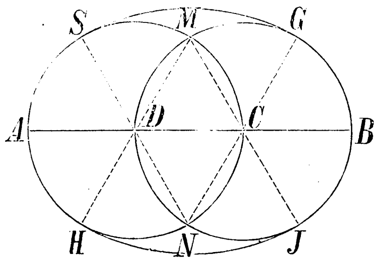


Obr. 39.

Vodorovná čiara *AB* predstavuje jej najväčší priemer, ktorý menujeme jej *veľkou osou*. V stredu AB postavená kolmá CD, pred stavuje zas jej najmenší priemer, ktorý menujeme jej *malou osou*. Otázne dva body E a F, v ktorých oba konce niti pripevnené nachodia sa, menujeme *ohniskami*. Dľa tohoto má schodnica dve osi, jednu veľkú a jednu malú, a dve ohniská. Bod ten, v ktorom sa obe osi režú *(O)* je jej *stredobod*.

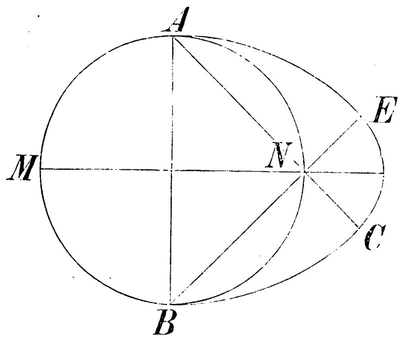
Spojíme-li ktorýkoľvek bod schodnice prímkami s jej ohniskami a sčítame-li tieto dovedna, zkúsime, že súčet oboch týchto prímok rovná sa veľkej osi. Tak na pr. $ET + FT = AB$. *(Obr. 39.)* Dľa tohoto je ellipsa taká do seba uzavretá čiara, u nejž súčet dialok jej ktoréhokoľvek bodu od dvoch stálych, v jej ňútri ležiacich bodov či takzvaných ohnísk, rovná sa vždy jednej a tej istej prímke či takzvanej veľkej osi. Čím bližej nachodia sa obe ohniská jedno k druhému, tým viac podobá sa ona kruhu a čím ďalej sú ony jeden od druhého oddialené, tým je ona schodnejšia.

Kružidlom kreslíme ellipsu tak, že načiarame ako predtým najprv vodorovnú prímku či jej veľkú os AB a z jej oboch koncov odrežeme rovnodlhé kusy AD a BC, pravda menšie nežli je polovica veľkej osi AB (*Obr. 40*). Týmto BC alebo AD kusu zodpovedajúcim otvorom opíšeme ako z D tak i z C bodu dva kruhy, a síce: $GBJNM$ a $ASMNH$. Oba tieto kruhy režú sa v bodoch M a N. Na to spojíme bod N s D a predlžime túto čiaru až po obvod kruhu či po S. Konečne opíšeme poslednej či SN prímke zodpovedajúcim otvorom ako z M tak i z N bodu dva obluky, a síce, obluk SG a obluk HJ. Týmto spôsobom nakreslená krivá čiara je ellipsa či schodnica.



Obr. 40.

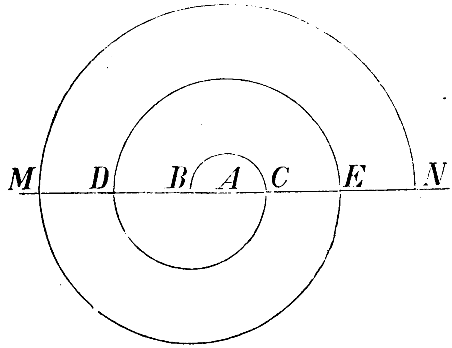
Krem tejto spomenutia zasluhuje ďalej ešte i takzvaná *vajcovitá* čiara. V podobe tejto čiary shotovujú debnári dná na kúpelových vaňách. Spôsob jej nakreslenia znázorňuje *obr. 41.* Predevším nakreslíme ľubovoľne alebo dľa potreby veľký kruh a v ňom dva jeden na druhom kolmo stojace priemery AB a MN. Na to načiarame z oboch koncov priemeru AB, k bodu N tetivy AN a BN, ktoré máličko i von z kruhu predlžime. Potom opíšeme priemerom AB ako z B tak i z B obluky BC a AE; konečne ale dialkou EN opíšeme obluk EC.



Obr. 41.

Konečne vysvetlíme ešte spôsob sostrojenia tak zvanej *špirálnej* čiary či *obtočnice*, akú na pr. závitkovaté ocelové pero na hodinkách predstavuje. (*Obr. 42.*)

Najsamprv načiarame ľubovoľno dlhú prímku *MN* a z jej niektorého bodu na pr. z *A* opíšeme nad prímkou ľubovoľne malým otvorom kružidla polokruh *BC*; tohoto polokruhu priemerom či otvorom *BC* opíšeme pod prímkou z bodu *B* druhý polokruh *DC*; posledného polokruhu priemerom či otvorom *DC* opíšeme zas z predešlého bodu *A* tretí polokruh *DE* nad prímkou; posledného polokruhu priemerom či otvorom *DE* opíšeme zas štvrtý polokruh z predošlého bodu *B* pod prímkou atď. Týmto spôsobom, vše posledného polokruhu priemer do kružidla berúc, a hneď z bodu *A* ***nad*** prímkou, hneď zas z bodu *B* ***pod*** prímkou polokruhy opisujúc, obdržíme otáznu ***špirálnu čiaru*** či ***obtočnicu***.

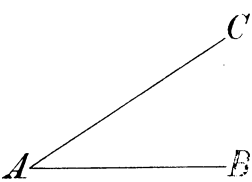


Obr. 42.

§ 12. O uhloch vôbec.

Načiarame-li na tabuli alebo papieri, z nejakého bodu, na pr. z bodu *A* dve, jedna od druhej odbiehavé prímky *AB* a *AC* (*Obr. 43.*): uzavrú medzi sebou priestor, ktorý menujeme ***uhlom***. Uhol je tedy, ***dvoma z jednoho bodu načiaranými odbiehavými prímkami uzavretý priestor***.

Otázny bod *A*, z ktorého sme čiarali, menujeme ***vrcholom*** a načiarané prímky *AB* a *AC* ***ramenami*** uhlu. Uhol má dve ramená a jeden vrchol, spolu tedy tri čiastky z ktorých sa skladá.



Obr. 43.

Uhol označujeme troma literami; dve z týchto litier píšeme u koncov oboch ramien a jednu u vrchola uhlu. U vrchola uhlu nalezajúcu sa píšeme a vyslovujeme vždy v prostriedku. Tak na pr. na *obr. 43.* vyobrazený uhol označíme a vyslovíme takto: uhol *BAC* alebo uhol *CAB* a nie *ACB*. Často označujeme uhol i len jednou literou, ktorá sa u jeho vrcholu alebo von nachodí alebo medzi oboma ramenami stojí. Tak na pr. uhol *BAC* možno i uhlom *A* alebo x pomenovať. Znak uhlu je $\sphericalangle$, a preto miesto: »uhol BAC« alebo uhol x, píšeme takto: $\sphericalangle BAC$ alebo $\sphericalangle x$.

Na *obr. 43.* z bodu A načiarané prímky AB a AC odchylujú sa jedna od druhej. Od veľkosti tejto odchýlky závisí veľkosť uhlu CAB. Nejaký uhol je totiž tým väčší, čím viac sa jeho ramená jedno od druhého odchylujú a naopak, tým menší, čím menšia je táto odchýlka. Poneváč veľkosť uhlu od odchýlky jeho ramien závisí, preto mnohí túto ***odchýlku*** dvoch, z jednoho bodu načiaraných odbiehavých prímok menujú uhlom. Rovnobežné či rovnaký smer majúce prímky, neuzavierajú medzi sebou žiadon uhol.

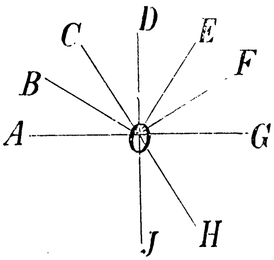
Predlžíme-li u uhlu BAC rameno AC i za boď C a rameno AB i za bod B, čo priam ako ďaleko, nezmení sa veľkosť uhlu BAC ani za mak. Z tohoto vyplýva, ***že veľkosť nejakého uhlu nezávisí od dĺžky, lež jedine od veľkosti odchýlky jeho ramien.***

Úlohy. 1. Nakresli na tabuli alebo papieri nejaký bod a načiaraj z neho dve odbiehavé prímky!

Ako menujeme dvoma odbiehavými prímkami uzavretý priestor? — *Čo* je tedy uhol? — *Ktoré* sú podstatné čiastky uhlu? — *Aké* prímky uzavierajú medzi sebou uhol? — *Od čoho* závisí veľkosť uhlu? — ***Prečo*** nezávisí veľkosť nejakého uhlu od dĺžky jeho ramien? — ***Prečo*** neuzavierajú rovnobežné prímky žiaden uhol medzi sebou? ***Koľkoraký*** smer majú ramená každého uhlu? — *O ktorej* hodine neuzaviera hodinová ručička s minútovou žiaden uhol? — *Kde*? na ktorých veciach či predmetoch pozorujeme uhly? — *Koľko* uhlov načítaš, keď na ruke prsty rozkriačiš? *Ktorým* znakom a koľkými literami označujeme uhol? — *Ktorú* z týchto troch, uhol označujúcich litier, píšeme alebo vyslovujeme v prostriedku?

§ 13. O pomenovaní údov dľa ich veľkosti.

Ako sme v predošlom podotkli, uhly môžu čo do veľkosti rozdielne byť, dľa toho, koľká je odchýlka ich ramien jednoho od druhého. Rozdielno veľké uhly majú i rozdielno pomenovanie.

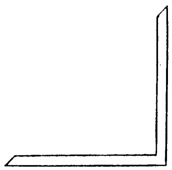


Obr. 44.

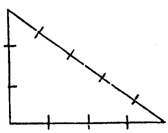
Položíme-li na stôl jednu na druhú, dve rovnodlhé paličky tak, že sa svojimi koncami dotýkajú a krutíme-li na to vrchnú kolo spodnej tak, ako to *obr. 44.* znázorňuje, budú sa kam diaľ tým viac jedna od druhej odchylovať a následkom toho, kam diaľ tým väčší uhol medzi sebou uzavierať, až konečne vrchnia palička bude na spodnej stáť kolmo. V tomto poslednom prípade, či keď vrchnia palička na spodnej stojí kolmo, uzavierajú obe paličky medzi sebou tak zvaný *pravý* uhol. Takýto pravý uhol je ∢ *AOD* *obr. 44*. Pravdaže kým vrchnia polička svoju kolmú polohu dostane, povstane medzi oboma nekonečne mnoho uhlov, ako na pr. ∢*AOB*, ∢ *AOC* atď. U všetkých týchto uhlov je avšak odchýlka ramien menšia nežli u pravého uhlu *AOD*, a preto sú všetky tieto uhly menšie nežli posledný či pravý uhol.

Takéto či od pravého uhlu menšie uhly, menujeme *ostrými* uhlami. Dľa tohoto ∢ *AOB*, a podobne ∢ *AOC* sú ostré uhly. Ostré uhly sú tedy čo do veľkosti rozdielne a od pravého uhlu menšie. Pravý uhol má ale stálu veľkosť, je vždy rovnaký. Odchýlka ramien je u neho určito-veľká.

Pravý uhol má v praktičnom živote veľký význam. Ako známo, kníhvazač obrezáva knihy, sklár reže sklo, tesár kreše drevo, murár múra steny vždy do pravého uhla. Všetci títo priemyselníci provodzujú to upotrebením takzvanej *uhelnice* t. j. pravý uhol predstavujúceho železného prístroja, aký *obr. 45* zobrazuje. Nemá-li murár uhelnice, sbije dovedna svojimi koncami, tri: 5 *dm*, 4 *dm*, 3 *dm* dlhé laty a pravý uhol je hotový. *Obr. 46*.



Obr. 45.



Obr. 46.

Krútime-li na udaný spôsob, hor spomenutú vrchnú paličku ešte vyše pravého uhlu dalej, (*Obr. 44*) bude odchýlka oboch paličiek ešte väčšia nežli u pravého uhlu, áno kolo bodu *O* krutiaca sa palička dostane sa raz do takej polohy k prvej pevno ležiacej, že bude ležať jej oproti a tvoriť s ňou takrečeno jednu prímku. Tejto veľkosti uhol či keď obe ramená uhlu ležia jedno k druhému oprotno, menujeme *rovným* alebo *vystretým* uhlom. Dľa tohoto ∢ *AOG (Obr. 44)* je rovný či vystretý uhol. Pravdaže, kým sa vrchnia palička zo svojej kolmej *DO*, do svojej oprotnej *OG* polohy dostane, povstane nekonečne mnoho uhlov, väčších nežli je pravý a menších nežli je rovný uhol, ako na pr. ∢ *AOE*, ∢ *AOF* atď. Všetky tieto od pravého uhlu väčšie a od rovného či vystretého uhlu menšie uhly menujeme *tupými* uhlami. Tupé uhly sú tedy, čo do svojej veľkosti rozdielne, rovný či vystretý uhol má však len jednu a síce určitú veľkosť či určitú odchýlku ramien. Všetky vystreté či rovné uhly sú rovnoveľké či rovnaké.

Rovný či vystretý uhol predstavujú krýdla letiaceho vtáka, keď ich cele vystre; tupý uhol znázorňuje máličko nalomená palica alebo cele roztvorené nožnice.

Ostré a tupé uhly menujeme jednorekom *kosmými* alebo kosými uhlami, preto tak, bo ich ramená stoja jedno na druhom kosmo.

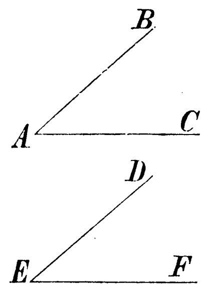
Krutíme-li otáznu paličku na hor udaný spôsob, ešte ďalej, i vyše rovného uhlu: bude odchýlka oboch paličiek od prvotnej ich polohy, ešte väčšia nežli u rovného uhlu. Tejto veľkosti uhly t. j. od vystretého či rovného uhlu, väčšie uhly menujeme *vydutými* č *vypuklými* uhlami. Dľa tohoto vysvetlenia sú na pr. ∡ *AOH*, ∡ *AOG* vypuklé či vyduté uhly. Vyduté či vypuklé uhly môžu čo do svojej veľkosti rozdielne byť, t. j. viac alebo menej vypuklé.

Podobne, ako paličky, možno i nejakú na tabuli nakreslenú prímku na pr. prímku *AO* (*obr. 44*) okolo jedneho zo svojich konečných bodov, na pr. vôkol bodu *O* krútiť. I táto bude sa od svojej prvotnej polohy kam dial tým viac odchylovať a s ňou hor udané rozličné uhly uzavierať.

Dľa tohoto posledného vysvetlenia uhol i tak ***povstane, jestli nejaká prímka, v jednej a tej istej ploche***, na pr. na tabuli alebo na papieri, ***okolo jedneho zo svojich koncov sa pohybuje.***

V tomto prípade prvotná jej poloha tvorí jedno, a posledná její poloha tvorí druhé rameno nejakého uhlu.

Sú-li u nejakých dvoch uhlov, rovnakležiace ramená rovnobežné, je-li na pr. (*Obr. 47.*) rameno *AB* uhlu *BAC* rovnobežné s ramenom *ED* uhlu *DEF* a rameno *AC* uhlu *BAC* rovnobežné s ramenom *EF* uhlu *DEF*, tenkrát je odchýlka ramien u jedneho uhlu toľká ako u druhého. Je-li ale odchýlka ramien u dvoch uhlov rovnaká, tedy sú oba uhly rovnaké. Z tohoto vyplýva;



Obr. 47.

že ***uhly, u ktorých rovnoležiace ramená sú rovnobežné, sú rovnaké;*** ďalej

že ***k nejakému známemu uhlu druhý s ním rovnaký, nakreslíme, jestli z nejakého bodu k obom jeho ramenám rovnobežné prímky načiarame.*** Tak na pr. k uhlu *BAC* (*Obr. 47.*) druhý, s nim rovnaký, nakreslíme, jestli z nejakého bodu *E*, najprv k ramenu *AB* a potom k ramenu *AC* rovnobežné *ED* a *EF* načiarame.

Úlohy. 1. Nakresli jedno po druhom: jeden ostrý, jeden pravý, jeden tupý, jeden vystretý či rovvý, a jeden vypuklý uhol! každý jeden o sebe.

Koľkoraké sú, čo do veľkosti, pravé uhly? a vystreté uhly? (Jednaké). U oboch týchto uhlov, je odchýľka ramien vždy rovnaká.

Koľkoraké, čo do veľkosti, môžu byť: ostré uhly! a vypuklé a tupé uhly? (Odp. Viacraké). — *Ako* menujeme od pravého menšie uhly? — *Ako* menujeme od pravého väčšie a od vystretého menšie uhly? — *Ktoré* uhly menujeme vypuklými uhlami?

Koľkoraké uhly nakreslené sú na tabuli?

U ktorého z týchto uhlov stoja obe ramená jedno na druhom kolmo? a u ktorého kosmo? — *U ktorého* uhlu ležia obe ramená jedno k druhému oprotno? — *Ktoré* úhly menujeme *kosmými* uhlami? Prečo?

2. Nakresli nejaký ostrý uhol a k nemu druhý, s nim rovnaký! *Ako* načiarame k nejakému známemu uhlu druhý s nim rovnaký? — *Kedy* sú dva uhly rovnaké? (Odp. Keď je u oboch odchýlka ramien rovnaká). — *Čo známe* o uhloch, u ktorých rovnak ležiace ramená sú rovnobežné?

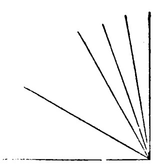
3. Nakresli nejaký tupý uhol a k nemu druhý, s nim rovnaký!

4. Nakresli nejakú vodorovnú prímku a na ňu druhú kolmo! *Aké* uhly povstaly týmto spôsobom? — *Koľko* pravých uhľov obdržíme, keď vodorovnú kolmou presekneme? —

§. 14. O uhlových a oblukových stupňoch.

Veľkosť uhlov vyslovujeme v takzvaných stupňoch, ktoré sú dvojaké, a síce: *uhlové* a *oblukové*. Uhlové stupne obdržíme, jestli pravý uhol na devädesiat rovných čiastok či na devädesiat rovnakých uhlov rozdelíme. Jeden toľkýto uhol, predstavuje jeden uhlový stupeň; dva toľkéto uhly, predstavujú dva, uhlové stupne; tri toľkéto uhly, predstavujú tri uhlové stupne atď.; devädesiat toľkýchto uhlov predstavuje devädesiat uhlových stupňov či jeden pravý uhol. Uhlové stupne sú tedy uhly, určitej veľkosti. Koľkokrát jeden toľkýto uhol, v nejakom uhle nachodí sa, toľko má tenže uhlových stupňov.

Aby sme aspoň povrchnú predstavu o týchto uhlových stupňoch obdržali, rozdeľme pravý uhol (*Obr. 48.*) dľa oka, najprv na tri rovné časti či na tri rovnaké uhly, na to jednu z týchto čiastok či jeden z týchto uhlov zas na tri rovné časti či na tri rovnaké uhly a konečne jeden z posledne obdržaných uhlov na 10 rovných čiastok či na 10 rovnakých uhlov. Týmto spôsobom obdržíme devädesiatu časť z pravého uhlu či uhlové stupne. Posledné rozdelenie možno si len v mysli predstaviť.



Obr. 48.

Keďže ale pravý uhol má 90 uhlových stupňov, musí jeho polovica, polovicu z 90 či 45 stupňov, a tretia jeho časť či trikrát menší uhol než je pravý 30 uhlových stupňov v sebe obsahovať atď.

Uhlové stupne ešte i tak obdržíme, jestli rovný či vystretý uhol na 180 rovných čiastok t. j. na 180 rovnakých uhlov rozdelíme.

Úlohy. 1. Nakresli pravý uhol a rozdel ho dľa oka: *a*) na polovice, *b*) na tretiny či na tri rovné časti! na päť rovných čiastok či päť rovnakých uhlov!

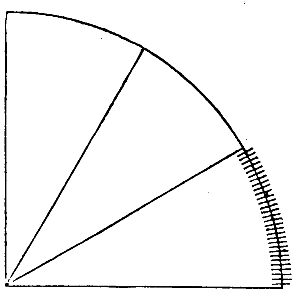
Koľko uhlových stupňov pripadne: na polovicu? na tretinu? na štvrtinu? na pätinu, pravého uhlu?

Čo rozumieme pod uhlovým stupňom? Koľkokrát je, uhol jedného stupňa menší: než pravý? a než vystretý?

2. Nakresli dľa oka: *a*) štyridsaťpäť uhlových stupňov majúic uhol? *b*) tridsať uhlových stupňov veľký uhol!

Rozl. *a*) Nakreslím pravý uhol a rozdelím ho dľa oka na polovice. *b*) Nakreslím pravý uhol a rozdelím ho, dľa oka na tri rovné časti.

Takzvané oblukové stupne zas obdržíme, jestli ľubovoľným otvorom kružidla, z vrcholu nejakého pravého uhlu počnúc od jedneho ramena k druhému, obluk opíšeme a tento posledný na 90 rovných čiastok rozdelíme. (*Obr. 49.*). Jeden z týchto oblúčkov znamená jeden oblukový stupeň; dva z týchto oblúčkov, znamenajú dva oblukové stupne atď. až do devädesiat. Oblukový stupeň je tedy devädesiata časť z celého, pravému uhlu zodpovedajúceho obluku.



Obr. 49.

Aby sme i o oblukových stupňoch nejakú predstavu obdržali, rozdeľme dľa oka nejaký pravému uhlu zodpovedajúci obluk, najprv na tri rovné časti, a jednu z posledných zas na 30 rovných čiastok. Následkom takéhoto podelenia, rozpadne sa otázna tretína celého obluku na tridsať rovných čiastok a následkom toho celý, pravému uhlu zodpovedajúci obluk, na devädesiat rovných čiastok. Obdržané oblučky sú devädesiatiny celého obluku či oblukové stupne.

Oblukové stupne ešte i tak obdržíme, jestli vystretému či rovnému uhlu zodpovedajúci obluk na 180 rovných čiastok rozdelíme.

Poneváč ale, ako už známe, pravý uhol má i uhlových stupňov 90, a vystretý uhol i uhlových stupňov 180, preto každý jeden z týchto uhlov ná práve toľko uhlových stupňov koľko oblukových.

Oblukové stupne sú síce tým väčšie, čím väčším otvorom kružidla opíšeme pravému uhlu zodpovedajúci obluk, toto avšak nemení nič na veci, bo v každom prípade bude mať pravý uhol zas len 90 a vystretý uhol zas len 180 oblukových stupňov.

Keďže ale pravý uhol má 90 oblukových stupňov, pripadne na polovic toľký uhol ako je pravý, polovica z 90 či 45 oblukových stupňov; na trikrát menší uhol než je pravý, pripadne tretina z 90 či 30 oblukových stupňov atď. Zo všetkého dosiaľ povedaného vyplýva:

že pravý uhol má 90 uhlových a práve toľko i oblukových stupňov;

že od pravého dvakrát menší uhol, má 45 uhlových a práve toľko i oblukových stupňov;

že od pravého trikrát menší uhol má 30 uhlových a práve toľko i oblukových stupňov atď.

Vôbec, *že každý jeden uhol má práve toľko uhlových koľko oblukových stupňov a naopak.*

O pravdivosti tohoto ešte i tak sa presvedčíme, jestli pravému uhlu zodpovedajúci obluk na 90 rovných čiastok rozdelíme a obdržané deliace body s jeho vrcholom spojíme. Týmto spôsobom rozpadne sa nie len obluk ale i uhol na 90 rovných čiastok a na každý jeden uhlový pripadne jeden oblukový stupeň a naopak.

Poneváč oblukové stupne ľahšie možno zobraziť než uhlové, bo obluk ľahšie dá sa na 90 rovných čiastok podeliť, než uhol, preto veľkosť uhlov meriame oblukovými stupňami. K tomuto cieľu slúži zvláštny prístroj tak zvaný *uhlomer,* (transporteur) o ktorom neskôr prehovoríme

Úlohy. 1. Nakresli pravý uhol a opíš ľubovoľným otvorom kružidla medzi jeho ramenami obluk!

Na koľko rovných čiastok či stupňov delíme tento pravému uhlu zodpovedajúci obluk? — *Ako* menujeme túto devädesiatu časť obluku? — *Na koľko* rovných čiastok či stupňov delíme vystretému uhlu zodpovedajúci obluk? — *K čomu* slúža tieto devädesiatiny a stoosemdesiatiny poťažných oblukov?

2. Rozdeľ pravému uhlu zodpovedajúci obluk na polovice a spoj deliaci bod s vrcholom uhlu! (dľa oka).

Koľko oblukových stupňov má každý z povstalých dvoch uhlov? a koľko uhlových stupňov? (Odp. 45 uhlových i oblukových).

3. Nakresli pravý uhol a jemu zodpovedajúci obluk: rozdeľ tento posledný dľa oka na tri rovné časti a spoj deliace body s vrcholom uhlu!

Koľko oblukových? a koľko uhlových stupňov má každý z povstalých troch uhlov? (Odp. 30 stup. uhlových a toľko i oblukových).

Stupne označujeme maličkou ničkou, ktorú privešujeme hore z prava ku číslu počet stupňov udávajúcemu. Tak na pr. 15 stupňov označujeme takto: 15^{0}.

Ako uhlové tak i oblukové stupne majú ešte i svoje podčiastky. Oba delíme najprv na 60 rovných čiastok, ktoré menujeme *minútami*, a síce u uhlových stupňov *uhlovými* a u oblukových stupňov *oblukovými* minútami. Minúty označujeme čiarkou ktorú píšeme v pravo a hore k minúty znamenajúcemu číslu. Tak na pr. 5 minút veľký uhol označujeme takto: $0^{0}\ 5'$.

Ďalej delíme ako oblukové tak i uhlové minúty zas na 60 rovných čiastok, ktoré menujeme *sekundami*, a síce u uhlových stupňov uhlovými a u oblukových stupňov oblukovými sekundami. Sekundy označujeme dvoma čiarkami, ktoré píšeme hore v pravo ku sekundy označujúcemu číslu. Tak na pr. 8 sekúnd veľký uhol označíme takto: $0^{0}\ 0'\ 8''$.

Dľa tohoto: $3^{0}\ 40'\ 25''$ značí 3 stupne 40 minút a dvadsaťpäť sekúnd veľký uhol.

Oblukové stupne a podobne i oblukové minúty a sekundy možno i mierou dĺžky na pr. metrom vymerať. Tak na pr. jeden oblukový stupeň na rovníku je 15 geografických míl dlhý, čo učiní 15 $\times$ 7420.4 či 111306 metrov, bo jedna geografická míla má 7420·4 *m*. A poneváč jeden oblukový stupeň na rovníku má 111.306 *m*, tedy na jednu oblukovú minútu pripadne tamže 1855.1 *m* a na jennu oblukovú sekundu 30.92 *m*.

Podobne, ako na rovníku, možno dĺžku oblukového stupňa alebo oblukovej minúty i na ktoromkoľvek inom kruhu vypočítať, pravda len vtedy, jestli jeho obvod známe. Poneváč celý obvod má 4 $\times$ 90 či 360°, preto jednomu oblukovému stupňu zodpovedajúcu dĺžku najdeme, jestli dĺžku celej kružnice 360-mi rozdelíme.

Úlohy. 1. Vypočítaj dĺžku jednoho oblukového stupňa, jestli celý obvod kruhu má 3600 *m*! (Odp. 10 *m*).

Na koľko stupňov musíme dĺžku celej kružnice? a polkružnice? a štvorníka či kvadranta (t. j. štvrtá časť kružnice) rozdeliť, chceme-li dĺžku jednoho oblukového stupňa vypočítať?

2. Vyhľadaj dĺžku jednej oblukovej minúty, jestli celý obvod kruhu či celá kružnica má 4000 *m*? (Odp. 0·185 *m*).

Ktoré podčiastky oblukového stupňa menujeme minútami? a *ktoré* sekundami? *Koľko* oblukových alebo uhlových minút má pravý uhol? (Odp. 90 $\times$ 60) a vystretý uhol? (Odp. 180 $\times$ 60) a celá kružnica? *Koľká* časť je 1 uhlová minúta z celého uhlového stupňa? a *koľká* časť je 1 obluková minúta z celého oblukového stupňa? a z celej kružnice? *koľko* oblukových sekúnd obsahuje v sebe celá kružnica? a *koľko* uhlových sekúnd? (Odp. 360 $\times$ 60 $\times$ 60).

3. Vypočítaj dĺžku jednej oblukovej sekundy, jestli celá kružnica má 40,000000 m? (Odp. 30.84 m.).

Na koľko čiastok musíme celú kružnicu jej dĺžku rozdeliť, aby sme obdržali dĺžku jednej oblukovej sekundy? (Odp. na 1.296,000).

Nejaký uhol má 2° 4′ 5″ koľko je to sekúnd? (Odp. 7445). Nejaký uhol má 374″, koľko je to stupňov? Odpoveď 0° 374″ či 0° 6′ 14″.

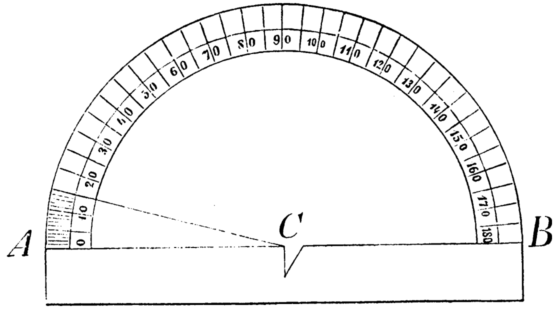
Zo všetkého o uholnej miere dosiaľ povedaného vyplýva, že *miera uhlu je uhol* alebo jemu zodpovedajúci obluk, ktorýžto posledný, poneváč je čiara a síce krivá čiara, i dlžostnou či dĺžčou mierou možno vymerať.

§ 15. O vymeriavaní uhlov uhlomerom.

Uhly vymeriavame takzvaným uhlomerom.

Uhlomer sostrojíme, jestli vystretému uhlu na pr. uhlu *ACB* (*Obr. 50.*) zodpovedajúci obluk, na 180 rovných čiastok t. j. na 180 oblukových stupňov rozdelíme.

Abysme obdržané stupne i číslami mohli označiť a celý uhlomer dľa potreby sem a tam prenášať: ponecháme kolkolom obluku a podobne pozdlž oboch ramien asi na palec široký limec, ktorý z papieru, na ňomž uhlomer je nakreslený vyrežeme. Vrchol C uhlu ACB označíme malým, do stredu spodného rovného limca urobeným výštikom. Ľavý, kolmý krajík tohoto výštiku, jeho najvyšší bod je opravdový vrchol uhlu ACB, bo tento krajík leží ako od bodu A tak i od bodu B rovnoďaleko, AC a BC ale sú jeho ramená.



Obr. 50.

Chceme-li nejaký na papieri nakreslený uhol vymerať t. j. jeho veľkosť v stupňcch vysloviť, položíme uhlomer na otázny uhol tak, že rameno uhlomeru AC. spadne s jeho jedným ramenom a ľavý kolmý krajík výštiku, tohoto najvyšší bod s jeho vrcholom. Na ktorý stupeň obluku otázneho uhlu druhé rameno ukazuje, toľko oblukových a súčasne i uhlových stupňov má otázny uhol. Ukazuje-li na pr. na 15, tedy má 15 stupňov, čo píšeme na krátce takto 15^0 k číslu 15 hore z' prava privesená nička znamená, ako už známe, stupne.

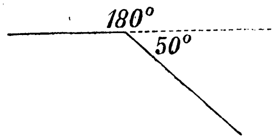
Chceme-li opačnú úlohu previesť, t. j. istý počet stupňov na pr. 15^0 majúci uhol nakresliť, načiarame prv na papieri alebo na tabuli ľubovoľnodlhú prímku, priložíme k nej uhlomer tak, že jej začiatočný bod spadne s vrcholom C a celá prímka s ramenom uhlomeru AC. Na to urobíme pri 15-om stupni von z limca maličký bod, ktorý po odstránení uhlomeru s otáznym začiatočným bodom, dovedna spojíme.

Úlohy. 1. Nakresli dva ľubovoľnoveľké, ostré alebo tupé uhly a vymeraj ich uhlomerom!

Ako priložíme uhlomer k otáznemu uhlu? — Kde nachodí sa vrchol uhlomeru? *Ktorý* krajík výštiku je rovnoďaleko ako od A tak od B?

2. Nakresli 20^0, 72^0, 140^0, 175^0 majúce uhly!

Má-li vymerať sa majúci uhol viac než 180^0, v tom prípade predĺžime niektoré z jeho ramien cez vrchol, (*Obr. 51.*) skrze čo obdržíme jeden vystretý či 180^0 majúci a jeden ostrý (alebo tupý) uhol. Tento posledný vymeriame a jeho stupne k 180° pridáme. Obnáša-li tento posledný na príklad 50°, tedy má celý vypuklý uhol 180°+50° či 230°.



Obr. 51.

Podobne pokračujeme i vtedy, keď nejaký vypuklý uhol treba nakresliť. Najprv totiž nakreslíme vystretý či 180° veľký uhol, a ktomuto potom ešte doplnok do nakresliť sa majúceho vypuklého uhlu. Chceme-li na pr. 230° veľký uhol nakresliť, nakreslíme najprv vystretý či 180° veľký a k tomuto potom ešte toľký, koľko do žiadaného vypuklého uhlu či do 230° chybuje. Poneváč od 180° do 230° chybí ešte 50°, tedy nakreslíme k vystretému ešte 50°-veľký uhol. *Obr. 51.*

Úlohy. Nakresli tri rozdielno veľké vypuklé uhly a vymeraj každý o sebe uhlomerom!

Koľko stupňov odrežeme u každého z týchto uhlov vopred, ešte pred meraním?

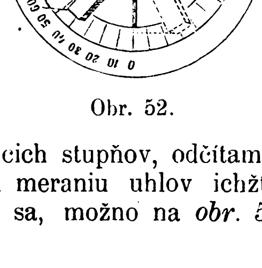
2. Nakresli: 190°, 220°, 235°, 276° majúce uhly!

Koľko stupňov majúci uhol nakreslíme vopred v každom z týchto príkladov? *O koľko* stupňov je prvý z týchto uhlov väčší než vystretý? a druhý? a tretí? atď.

K meraniu pravých uhlov na poli, upotrebujeme takzvaný *uhlový kríž* t. j. dve dovedna sbité a pod pravým uhlom režúce sa latky, (+) jichžto konce opatrené sú do hora trčiacimi, k visirovaniu slúžiacimi klinčeky. Postavíme-li uhlový kríž vodorovne a tak, že jedna z otáznych latiek, leží v smere vykolkovanej prímky, tedy udáva tá druhá smer na nej stojacej kolmej a preto možno tento prístroj i k vyznamenaniu kolmých čiar na poli a vôbec v slobodnom upotrebiť.

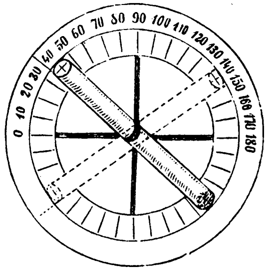
K meraniu ostatných, akýchkoľvek uhlov na poli, postačí nasledujúci uhlomer.

Na dve jedna na druhej priekom ležiace a dovedna sbité týčky pripevníme kruhovitý a na 360° podelený limec (*Obr. 52*) v jehož stredu nalezá sa kolo kolmej osi pohyblivý a na jednom zo svojich krajov k visirovaniu dvoma klinčekami opatrený linonár. Keď meriame, položíme otázny uhlomer vodorovno na nejaký pevno do zeme zabitý kôl a visirujeme najprv v smere jedneho a potom v smere druhého ramena, vymerať sa majúceho uhla a počet jemu zodpovedajúcich stupňov, odčítame na limci.



Obr. 52.

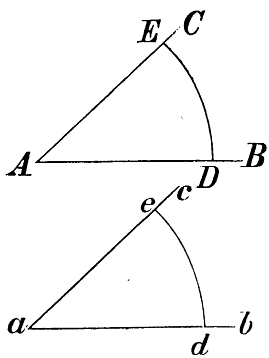
K meraniu uhlov ichžto ramená *v kolmo* ležiacej rovine nachodia sa, možno na *obr. 53* znázornený uhlomer upotrebiť, ktorý počas merania prišrau˙ ujeme o nejaký kôl tak, že jeho límec stojí kolmo. Miesto linonára nachodí na ňom papierová a okolo vodorovnej osi pohybujúca sa a v ňútri na čierno zabarvená trubica. K visirovaniu slúža, dva u predného a dva u zadného jej otvoru nalezajúce sa konské vlasy, ktoré sa pod pravým uhlom režú a jeden k druhému takú polohu majú, že pri pozeraní cez trubicu sa cele kryjú t. j. vodorovný vlas predného otvoru spadá s vodorovným vlasom zadného otvoru a podobne kolmý vlas predného otvoru spadá s kolmým vlasom zadného otvoru. Počas merania dáme trubici takú polohu,



Obr. 53.

že prierezné body otáznych vlasov ležia v smere prvého ramena vymerať sa majúceho uhlu a že 0° spadne s vodorovným vlasom. Na to krutíme trubicu do smeru druhého ramena, a vyhľaďáme na limci, s ktorým stupňom spadá otázny vodorovný vlas teraz. Toľko má otázny uhol stupňov. Alebo, pozorujeme s ktorým stupňom spadá vodorovný vlas v prvom a s ktorým v druhom prípade a dľa toho určíme veľkosť otázneho uhlu.

Máme-li nejaký uhol, na pr. ∢ *BAC* preniesť t. j, k nemu druhý, s ním rovnaký, nakresliť: načiarame ľubovoľnú prímku *ab*. Na to opíšeme z vrcholu známeho ∢ *BAC* ľubovoľným otvorom kružidla nejaký obluk na pr. *ED* a tým istým otvorom kružidla i zo začiatočného bodu *a* prímky *ab*, *(Obr. 54)* toľký obluk *de* ako je *DE*. Na to spojíme začiatočný bod *a* s *e*. Týmto sposobom nakreslený uhol *bac* rovná sa čo do veľkosti, danému uhlu *BAC*, a síce preto, že *rovnakým oblukom zodpovedajú i rovnaké uhly*, pravda len vtedy, jestli oba obluky v jednom a tom istom kruhu nachodia sa, alebo, jestli oba obluky (ako v tomto príklade) jedným a tým istým otvorom kružidla sú opísané.

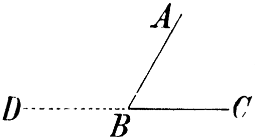


Obr. 54.

Úlohy. Nakresli ľubovoľnoveľký ostrý alebo tupý uhol, a k nemu druhý s ním rovnaký dľa tohoto spôsobu.

§ 16. O vedľajších, vrcholových, striedavých, súvislých a protiuhloch.

Predĺžime-li jedno z ramien uhlu ABC na pr. rameno BC cez vrchol B, obdržíme druhý, vedľa neho ležiaci uhol ABD (*obr. 55.*) Oba tieto uhly t. j. pôvodný ABC a povstalý ABD majú spoločný vrchol B a spoločné jedno rameno AB, ostatné dve ich ramená BD a BC ale ležia jedno druhému oprotno. Tejto polohy uhly menujeme *vedľajšími* uhlami či *príuhlami.*



Obr. 55.

Poneváč posledné dve ich ramená ležia jedno druhému oprotno, preto uhol ABD a uhol ABC tvoria spolu dovedna rovný či vystretý uhol DBC, ktorý ako známe, má 180°. Z tohoto vyplýva:

že, vedľajšie uhly majú dovedna vždy 180° či že sa rovnajú dvom pravým uhlom.

Úlohy. 1. Nakresli ľubovoľnovelký ostrý uhol a predĺž niektoré z jeho ramien cez vrchol!

Aký vedľajší uhol zodpovedá ostrému uhlu? — *Koľký* vedľajší uhol zodpovedá: 40°? 80°? 35° veľkému uhlu? (Odp. 140°, 120°, 145°).

2. Nakresli ľubovoľnoveľký tupý uhol a ku nemu patričný vedľajší!

Aký vedľajší uhol zodpovedá tupému uhlu? — *Koľký* vedľajší uhol zodpovedá: 140°! 135°! 116° veľkému uhlu? (Odp. 40° 45°, 64°).

3. Nakresli pravý uhol a k nemu vedľajší!

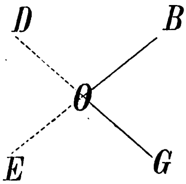
Aký vedľajší uhol zodpovedá pravému uhlu? — *Ukáž* vedľajšie uhly na obločných rámoch!

4. Vypočítaj k nasledujúcim uhlom, zodpovedajúce vedľajšie: *a*) 35° 12′ *b*) 108° 46′ *c*) 96° 50′.

Odp. *a*) 144′ 48′ *b*) 71° 14′ *c*) 83° 10′.

Koľko stupňov majú dva vedľajšie uhly dovedna?

Dľa tohoto *k nejakému, v stupňoch vyslovenému uhlu jemu zodpovedajúci vedľajší najdeme, jestli jeho stupne zo 180° odčítame.*



Obr. 56.

Predĺžime-li obe ramená nejakého uhlu cez jeho vrchol, n. pr. ramená OB a OG uhlu BOG (*Obr. 56.*) cez vrchol O, obdržíme nový uhol DOE, ktorý leží tamtomu oprotno. Oba tieto uhly či BOG a DOE majú po prvé: oprotno ležiace ramená (a síce: ramenu OB leží oprotno OE, a ramenu OG leží oprotno rameno OD) a po druhé: spoločný vrchol. Tohoto spôsobu uhly menujeme *vrcholovými* uhlami.

Každé dve oprotno ležiace ramená týchto uhlov majú jeden a ten istý smer, rameno BO má ten istý smer ako OE, a rameno OG zas ten istý smer ako OD. Poneváč ale obe z týchto oprotno ležiacich ramien, majú jeden a ten istý smer, preto je ich odchýlka u uhlu BOG toľká, ako u uhlu DOE. Z tohoto vyplýva, že ***vrcholové uhly sú rovnaké.***

Ako BOG a DOE, podobne sú i BOD a GOE tiež vrcholové uhly. bo i tieto majú spoločný vrchol O a i týchto obe ramená ležia jedno druhému oprotno a majú jeden a ten istý smer.

Vrcholové uhly ešte i tak obdržíme, jestli dve prímky jednu druhou presekneme.

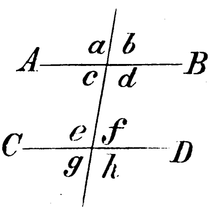
Úlohy. 1. Nakresli jedno po druhom: ostrý, tupý a pravý uhol a ku každému zodpovedajúci vrcholový.

Ako to prevedieš? *Aký* vrcholový uhol zodpovedá ostrému? (Odp. Ostrý.) *Aký* tupému? a *aký* pravému uhlu?

2. Presekni vodorovnú prímku kolmou, koľko vrcholových uhlov obdržíš? a koľko stupňov má každý jeden?

Koľký vrcholový uhol zodpovedá $30^0\ 30'$ veľkému uhlu? (Odp. $30^0\ 30'$).

Presekneme-li dve prímky na pr. AB a CD (*Obr. 57.*) treťou EF,*) obdržíme dvakráť štyri či osem uhlov, a síce: $\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$, $\sphericalangle c$, $\sphericalangle d$, $\sphericalangle e$, $\sphericalangle f$, $\sphericalangle g$, a $\sphericalangle h$. Štyri z týchto uhlov ležia okolo vrchného a štyri okolo spodného spoločného vrcholu. U každého vrcholu nachodia sa ako vedľajšie tak i vrcholové uhly. Tak na pr. u vrchného vrcholu vedľajšie uhly sú: $\sphericalangle a$ a $\sphericalangle b$, $\sphericalangle a$ a $\sphericalangle c$ atď. vrcholové uhly sú: $\sphericalangle a$, a $\sphericalangle d$, $\sphericalangle c$ a $\sphericalangle b$. — Povážime-li všetkých týchto ôsmych uhlov polohu ku priesečnej EF, ako k tejto ležia. Zkúsime:



Obr. 57.

že, štyri z nich ležia na jej ľavej strane a štyri zas na jej pravej strane. Na jej ľavej strane nachodia sa: $\sphericalangle a$, $\sphericalangle c$, $\sphericalangle e$ a $\sphericalangle g$; na jej pravej strane zas: $\sphericalangle b$, $\sphericalangle d$, $\sphericalangle f$ a $\sphericalangle h$; ďalej:

že, štyri z nich, ležia vnútri či medzi preseknutými prímkami AB a CD, a štyri zovnútri či von z preseknutých prímok. Medzi preseknutými prímkami ležia: $\sphericalangle c$, $\sphericalangle d$, $\sphericalangle e$ a $\sphericalangle f$; von z preseknutých prímok: $\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$, $\sphericalangle g$ a $\sphericalangle h$.

Dva také, z týchto osem uhlov, ktoré ležia na jednej a tej istej strane otáznej priesečnej EF, avšak ***nad*** alebo ***pod*** preseknutými prímkami, menujeme ***protiuhlami.*** Dľa tohoto protiuhly sú: $\sphericalangle a$ a $\sphericalangle e$; potom $\sphericalangle c$ a $\sphericalangle g$; ďalej, $\sphericalangle b$ a $\sphericalangle f$; konečne $\sphericalangle d$ a $\sphericalangle h$.

*) Na obr. 57. chybí u priesečnej čiary hore litera E a dolu F.

Dva také uhly, ktoré ležia krížom či krížmo na oboch stranách priesečnej avšak medzi preseknutými prímkami, menujeme *vnútornými striedavými* alebo *krížovými* uhlami. Dľa tohoto vnútorné striedavé uhly sú: ∢ *c* a ∢ *f*, ∢ *e* a ∢ *d*.

Dva také uhly, ktoré ležia krížmo na oboch stranách priesečnej avšak von z preseknutých prímok, menujeme: *zovnútornými* striedavými či zovnútornými krížovými uhlami. Dľa tohoto zovnútorné striedavé či krížové uhly sú: ∢ *a* a ∢ *h*, ∢ *b* a ∢ *g*.

Konečne dva také z týchto uhlov, ktoré ležia medzi preseknutými alebo von z preseknutých avšak na jednej a tej istej strane priesečnej, menujeme *súvislými* uhlami. Dľa tohoto súvislé uhly sú: ∢ *c* a ∢ *e*, potom ∢ *d* a ∢ *f*, taktiež ∢ *a* a ∢ *g*, konečne ∢ *b* a ∢ *h*.

Otázky. *Ktoré* z týchto osem uhlov menujeme: protiuhlami? *Ktoré* vnútornými striedavými? *Ako* ležia zovnútorné striedavé uhly? *Ktoré* menujeme súvislými uhlami? *Koľko* párov súvislých uhlov nachodí sa na obr. 57.? *Koľko* párov protiuhlov? Ako povstanú všetky tu spomenuté: striedavé, súvislé a protiuhly?

Známe-li, koľko jeden alebo druhý pár tu opísaných uhlov má stupňov, tak ostatné možno veľmi snadno vypočítať. Všetky ostatné uhly sú totiž, alebo vedľajšie alebo vrcholové ku obom známym.

Má-li n. pr. ∢ *a* 100° a jemu zodpovedajúci protiuhol ∢ *e* 110°, tenkrát sú ostatné, k týmto dvom alebo vedľajšie alebo vrcholové uhly a čo také snadno vypočitateľné. Tak n. pr. ∢ *b* musí mať 80°, bo je vedľajší k ∢ *a* a dva vedľajšie uhly majú spolu 180°; podobne ∢ *h* musí mať toľko ako ∢ *e* t. j. 110°, bo oba sú vrcholové uhly atď. Týmto spôsobom možno i ostatné vypočítať.

Úlohy. 1. Nakresli dve kosmej polohy prímky, presekni jich treťou, vymeraj uhlomerom jeden pár zovnútorných striedavých uhlov a ostatné vypočítaj z týchto! *Koľké* sú v tomto prípade ostatné uhly?

Inakšie má sa vec u rovnobežných prímok. Sú-li otázne dve, treťou preseknuté prímky (*obr. 57.*) *rovno*bežné, je-li n. pr. prímka *AB* rovnobežná s *CD*, tenkrát je ich odchýlka od priesečnej *EF* rovnaká t. j. v tomto prípade odchyluje sa *AB* na jednej a tej istej n. pr. na pravej strane, od priesečnej *EF* na toľko ako *CD*. Je-li ale táto odchýlka oboch preseknutých prímok od priesečnej rovnaká: tenkrát sú i uhly *b* a *f* t. j. dva protiuhly rovnaké.

Vymeriavame-li tieto dva uhly uhlomerom a vypočítame-li ostatné, dľa hor udaného spôsobu, tenkrát presvedčíme sa, jestli do patričných uhlov (*obr. 57.*) miesto litier im zodpovedajúce stupne vpíšeme, že v tomto prípade:

a) *ktorékoľvek dva ostatné protiuhly;* a

b) *ktorékoľvek dva zovnútorné alebo vnútorné striedavé uhly sú tiež rovnaké;* a že, po

c) *ktorékoľvek dva súvislé uhly majú spolu dovedna 180°.*

Obnáša-li n. pr. ∢ *b* a ∢ *f* každý osebe 60°, tenkrát má jeden pár vnútorných striedavých uhlov po 120° druhý pár po 60°; podobne jeden pár protiuhlov po 60°, druhý pár protiuhlov po 120°; dva, ktorékoľvek súvislé uhly ale majú 60° + 120° = 180° atď. Podobne, či vypočítaním možno sa i opaku tohoto presvedčiť. Známe-li n. pr.

že dva, ktorékoľvek, striedavé či vnútorné či zovnútorné uhly sú rovnaké, alebo že dva súvislé uhly majú dovedua 180°, tenkráť:

ktorékoľvek dva protiuhly sú rovnaké, a následkom toho, otázne dve prímky rovnobežné.

Má-li na pr. niektorý pár vňútorných striedavých uhlov po 70°, tenkráť má druhý pár týchže uhlov po 110°; jeden pár protiuhlov po 70°, druhý pár protiuhlov po 110° a následkom čoho otázne dve prímky sú rovnobežné.

Zo všetkého tu povedaného vyplýva, že dve *prímky sú rovnobežné,* jestli, ktorékoľvek: dva protiuhly, alebo dva vnútorné alebo dva zovnútorné striedavé uhly sú rovnaké alebo jestli súvislé uhly majú 180°. A naopak, sú-li ktorékoľvek: *dva protiuhly alebo dva vnútorné alebo zovnútorné uhly rovnaké* alebo jestli súvislé uhly majú 180°, tenkráť sú otázne prímky rovnobežné.

Tu vysvetlené vlastnosti striedavých, súvislých a protiuhlov podávajú nám znamenitý spôsob:

a) k nakresleniu dvoch (alebo viac) rovnobežných prímok a

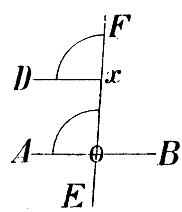
b) k vyskúmaniu rovnobežnosti dvoch prímok, ktorú byináčej veľmi ťažko bolo určiť, keďže rovnobežné prímky do nekonečnosti nemožno predĺžiť a ich rovnobežnosť na nekonečne jeden od druhého oddialených miestach vyskúmať.

Úlohy. 1. Nakresli pomocou trojuhelníka a operadlového linonára dve rovnobežné prímky a oprobuj, či sú ozaj cele rovnobežné? Ako to prevedieš?

Odp. Preseknem ich treťou a oprobujem *a)* či protiuhly sú rovnaké alebo *b)* či niektorý pár striedavých uhlov je rovnaký alebo *c)* či súvislé uhly majú dovedna 180°.

2. Nakresli dve vodorovno rovnobežné prímky pomocou kružidla!

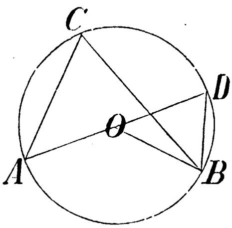
Odp. Nakreslím ľubovoľnodlhú vodorovnú prímku *AB, (obr. 58.)* pretnem ju treťou *EF* a na tejto poslednej, z jej niektorého bodu, na pr. z x opíšem tým istým otvorom kružidla ako z O obluk, odrežem z neho toľkú časť ako u O a spojím bod D s x. Poneváč $\sphericalangle\ AOx$ je toľký ako $\sphericalangle\ DxF$, preto sú prímky Dx a AO rovnobežné, bo otázne uhly sú protiuhly.



Obr. 58.

§. 17. O obvodových a zorných uhloch.

Spojíme-li v nejakom kruhu počiatočný a konečny bod nejakého obluku na pr počiatočný bod A a konečný bod B obluku AB s ktorýmkoľvek bodom kružnice na pr. s C alebo D, obdržíme takzvané *obvodové* uhly ACB a ADB (*obr. 59.*)



Obr. 59.

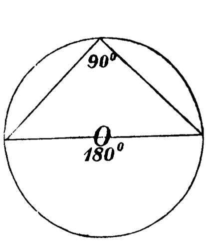
Obvodové uhly majú svoj vrchol v obvode kruhu, odkiaľ i ích názov. Ramená obvodových uhlov sú *tetívy*. K jednomu o tomuže obluku možno nekonečne mnoho obvodových uhlov nakresliť.

Spojíme-li počiatočný a konečný bod otázneho obluku AB so stredobodom kruhu O, obdržíme takzvaný *stredový* uhol AOB.

O stredových a obvodových uhloch, ktoré stoja na jednom a tom istom obluku, platí tá poučka:

že nejaký stredový uhol je dvakrát väčší než na tom istom obluku stojaci obvodový a naopak, že obvodový uhol je dvakrát menší, nežli na tom istom obluku stojaci stredový. Tak na pr. na obr. 59 je $AOB = 2ACB$ alebo $2ADB$ a ACB je $^1/_2 AOB$ a podobne i ADB je $^1/_2 AOB$, o čom sa uhlomerom možno presvedčiť

Poneváč obvodový uhol je dvakrát menší, než jemu zodpovedajúci stredový, preto 180° veľkému stredovému uhlu zodpovedajú 90° veľké obvodové, bo polovica zo 180 je 90. Na základe tohoto, pravé či 90° majúce uhly sostrojíme, jestli najprv kruh opíšeme a potom k 180° veľkému stredovému uhlu jemu zodpovedajúci obvodový nakreslíme. (*Obr. 60.*)



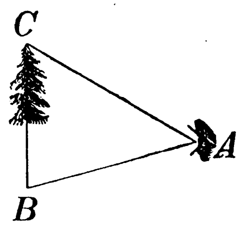
Obr. 60.

Úlohy. 1. Nakresli kruh a vyznač na ňom 140° veľký obluk; počiatočný a konečný bod tohoto obluku spoj ako so stredobodom kruhu, tak i s nejakým bodom kružnice.

Aké uhly povstaly týmto spôsobom? *Koľko* stupňov má povstalý obvodový a stredový? *Koľkokrát* je tamten menší než tento?

Spomenutia zasluhuje ešte i takzvaný *zorný* uhol, ktorý obdržíme, jestli z najvyššieho a najnižšieho bodu nejakého predmetu, na ktorý zrieme, prímky do nášho oka v mysli čiarame. Tak na pr. oko A vidí či zrie pred sebou stojací strom CB pod uhlom CAB alebo BAC. Uhol BAC je zorný uhol. (*Obr. 61.*)

Obnáša-li dialka nejakého predmetu od oka 57-kráť toľko, koľká je jeho výška (alebo koľký je jeho priemer) v tom prípade je zorný uhol práve 1° veliký. Čim bližšie stojíme k jednemu a tomu istému predmetu, tým väčší a čím ďalej sa od neho oddialime, tým menší je otázny zorný uhol.



Obr. 61.

V astronomii hrá zorný uhol veľký zástoj; pomocou neho určujeme diaľku nebeských telies jednoho od druhého. Zorné uhly nebeských telies sú veľmi malé. Tak na pr. mesiac zrieme pod 0° 31′ 2″ a slnce pod 0° 32′ 3·64″ veľkým uhlom.

Časť druhá.

Plochomerba (Planimetria).

§. 18. O rovných plochách či rovinách.

Ako už z úvodu známe, plochy sú hraničné najzovňútornejšie miesta telies, kde sa tieto už prestávajú rozprestierať. U niektorých telies sú tieto hraničné plochy rovné, ako na pr. u obrezanej dosky, u iných zas krivé, ako na pr. u jablka.

Plochu, na ktorej žiadne vyvýšeniny a priehlbiny či žiadne poddúté a vydúté miesta nenachodia sa, menujeme *rovnou* plochou či nakrátce *rovinou* alebo i *pláňou, pláninou*. Rovnú plochu či rovinu predstavujú na pr. stolová tabla jej vrch, boky tehly, steny izby atď.

Rovná plocha alebo rovina povstane, jestli nejaká prímka v jednom a tom istom, avšak nie vo svojom vlastnom smere, sa pohybuje. Týmto spôsobom pohybovavšou sa prímkou opísaná *cesta*, predstavuje rovnú plochu či rovinu. Potrieme-li jeden kraj nejakého rovného linonára kriedou a kĺžeme-li ho touto potretou stranou po tabuli, opíše tenže rovnej ploche podobnú cestu či rovinu, ktorú stopy natretej kriedy znázorňujú.

Stolári skúmajú rovnotu rovín na pr. rovnotu dosák, do rovna ohoblovanou latou, ktorú na otáznu dosku jej jedným krajom položia. Prilieha-li kraj otáznej laty ku doske k jej ploche všade rovnako, pozdĺž i priekom, vtedy je otázna doska, jej vrch rovný, v odpornom prípade ale má jaminy a vyvýšeniny.

Rovnotu roviny či plániny ešte i tak skúmame, že na ňu v rozličných smeroch prímky čiarame. Na rovine na pr. na stole možno totiž v ktoromkoľvek smere a koľkokoľvek prímok načiarať, na krivej ploche je toto však alebo len v jednom smere možné alebo vôbec nemožné.

Úlohy. 1. Prerež, do tuha vypnutou niťou, kus hliny alebo kus mydla, v jednom a tom istom smere!

Akú plochu predstavuje takto povstalá prierezná plocha? — *Akú* plochu predstavuje ploské zrkadlo? a školská tabula?

Koľko prímok možno na rovine či na plánine cez jeden bod načiarať? a na krivej ploche na pr. na válci alebo na guli?

Ako prímky podobne i roviny môžu byť čo do polohy: *kolmé*, *vodorovné* a *kosmé* či *kosé*.

Vodorovnú rovinu znázorňuje na pr. podlaha izby, nejaká pláň, vrch stácej vody atď.

Vodorovnú polohu rovín skúmame alebo murárskou alebo vodnou vážkou *(obr. 14.)* a síce tak, že na vyskúmať sa majúcu rovinu položíme najprv rovnú latu, v rozličných smeroch a na rozličných miestach, a na túto vodnú alebo murársku vážku. Vpadne-li záväž vážky vždy do žiebka alebo nachodí-li sa bublinka vodovej vážky vždy a všade v jej stredu, tenkráť je otázna rovina vodorovná, v odpornom prípade ale kosmá.

Kolmej polohy rovinu predstavujú na pr. steny izby, steny domu, obločné tably atď.

Kolmú polohu rovín skúmame zas závažou, cele tak ako kolmú polohu prímok, a síce, voľno visiacu záväž priblížime k rovine a pozorujeme, či visí od nej všade rovnoďaleko? a či sa jej vrchný alebo spodný koniec od roviny máličko neodchyľuje?

Konečne, kosmej polohy rovinu, predstavujú boky dachu, hore vrchom vedúca hradská, o stenu opretá doska atď.

Dve alebo viac rovín, ktoré majú jeden a ten istý smer, menujeme *rovnobežnými*, v odpornom prípade ale nerovnobežnými, či sbiehavými alebo rozbiehavými *rovinami*.

Príklad rovnobežných rovín podávajú oprotné steny izby, podlaha a povala, oprotné boky obrezanej dosky atď.

Nerovnobežné roviny pozorujeme zas u dreveného klina, u dláta, u sekery atď.

Úlohy. 1. Oprobuj či steny izby stoja opravdu kolmo! Podobne, vyskúmaj či stôl, jeho tabla, leží vodorovno! Ako to prevedieš?

Akej polohy roviny predstavujú boky na stole ležiacej tehly? a jej vrchná a spodná plocha?

Akú polohu majú bočné a akú priečne dosky police?

Koľkoraků polohu rozoznávame u rovín?

Hranice rovín sú alebo príme, alebo krivé, alebo miešané t. j. i príme i krivé čiary.

Roviny, ichžto hranice sú prímky, menujeme *primočiarnymi* rovinami. Primočiarnu rovinu predstavuje na pr. stena izby alebo jej podlaha.

Roviny, íchžto hranice sú krivé čiary, menujeme *krivočiarnymi* rovinami. Dobrý príklad takejto roviny podáva dno na sude, pokrievka atď.

Konečne roviny, íchžto hranice sú z čiastky príme z čiastky ale krivé čiary, menujeme *miešanočiarnými* rovinami. Miešanočiarnu rovinu znázorňuje na pr. čiastka nejakého dna atď.

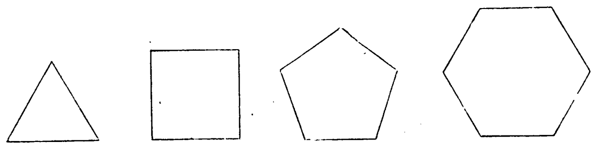
§. 19. O prímočiarnych, krivočiarnych a miešanočiarnych obrazcoch čili figúrach.

Na papieri alebo na tabuli nakreslené a už či prímymi či krivými a či miešanými čiarami ohraničené rovné plochy či roviny menujeme obrazcami čili figúrami, bo na papieri alebo na tabuli nakreslené roviny sú vlastne zmenšené obrazy či obrazce skutočných rovín.

Ako roviny, podobne i ich zobrazujúce obrazce čili figúry, môžu byť: prímo-, krivo-, a miešanočiarne.

Prímočiarny obrazec uzavierajúce prímky menujeme jeho *stranami.*

Troma prímkami či troma stranami ohraničený obrazec menujeme *trojuhelníkom (obr. 62.)*, preto tak, že každý takýto obrazec, má nie len tri strany ale i tri uhly.



Obr. 62.

Štyrma prímkami či štyrma stranami ohraničený obrazec menujeme *štvoruhelníkom*, preto tak, že každá takáto figúra má nie len štyri strany ale i štyri uhly.

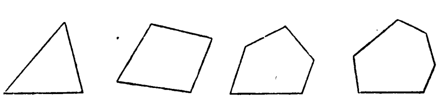
Piatima stranami či piatima prímkami ohraničenú figúru, menujeme *päťuhelníkom;* šiestima prímkami či šiestima stranami ohraničený obrazec *šesťuhelníkom* atď.

Viac než štyri strany majúce figúry, ako sú päťuhelník, šesťuhelník atď. menujeme jednorekom viac- alebo *mnohouhelníkami.*

Každý prímočiarný obrazec má práve toľko uhlov, koľko strán.

Sú-li u prímočiarneho obrázca, ako uhly tak i strany rovnaké, menujeme ho *pravidelným*, v odpornom prípade *nepravidelným* obrazcom.

Pravidelné troj-, štvor-, päť-, šesťuhelníky znázorňuje *(obr. 62.)*



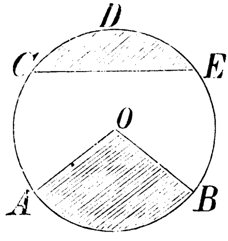
Obr. 63.

Nepravidelné troj-, štvor-, päť-, šesťuhelníky *(obr 63.).*

Krivou čiarou ohraničený obrazec, znázorňuje kruh alebo ellipsa *(obr. 38.* a *39.).*

Miešanočiarny obrazec, predstavuje takzvaný *výsek* (sector) a takzvaný *odsek* (segment) kruhu. *(Obr. 64.).*

Výsek kruhu obdržíme, jestli, dvoma polmerami, ľubovoľnoveľkú časť z kruhovej plochy vysekneme na pr. výsek AOB (*obr. 64.*). Odsek kruhu zas obdržíme, jestli tetivou ľubovoľnoveľkú časť z kruhu odsekneme na pr. odsek *CDE obr. 64.*



Obr. 64

Ulohy. 1. Nakresli tri body A, B, C, tak, že neležia v jednom a tom istom smere a spoj ich prímkami!

Ktorý trojuhelník predstavuje nakreslený obrázec? — Ktorý trojuhelník menujeme pravidelným?

2. Nakresli štyri body A, B, C, D, *dva hore* a dva dolu a spoj ich v tom poriadku, ako jeden po druhom nasledujú, prímkami!

Ktorý obrazec povstane týmto spôsobom? — Ktorý štvoruhelník menujeme pravidelným? a ktorý nepravidelným?

3. Nakresli dľa oka: päť-, šesť-, sedemuhelník!

4. Nakresli kruh a načiaraj doň dva, jeden na druhom kolmo stojáce priemery!

Ktoré a aké obrázce predstavujú povstalé štvrtiny kruhu? — *Čo* rozumieme pod výsekom kruhu? — *Ktoré* čiary tvoria hranice výseku?

5. Nakresli kruh a rozdeľ ho tetivou najprv na dve rovné a potom na dve nerovné časti!

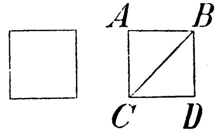
Ktorú časť kruhu menujeme jeho odsekom? — *Akočiarny* obrazec predstavuje odsek kruhu? — *Ktorá* tetiva delí kruh na dva rovné odseky?

§ 20. O štvoruhelníkoch či o štvorhranoch.

Štvoruhelníkami alebo štvorhranami menujeme takové figúry, ktoré majú štyri strany a štyri uhly. Dľa veľkosti uhlov a ich polohy a dľa veľkosti strán rozoznávame takzvané: ***štvorce, obdĺžniky, kosoštvorce, kosodĺžniky, lichobežníky*** a ***nerovnobežníky*** či ***rôznobežníky***. Každý jeden z týchto štvoruhelníkov má svoje zvláštne vlastnosti, a preto prehovoríme o každom o sebe.

a) *Štvorec* čili kvadrat (Quadrat).

Štvorcom čili kvadratom menujeme taký štvoruhelník, ktorý má štyri rovnaké strany a štyri rovnaké uhly. Tieto posledné sú pravé či 90^0 veľké. Štvorec znázorňuje *obr. 65*, bo $AB = AC = CD = BD$ *a uhol* $ABD = \measuredangle BDC = \measuredangle ACD = \measuredangle BAC = 90^0$. Poneváč u štvorca všetky štyri strany sú ro-



Obr. 65.

vnaké, preto je štvorec *rovnostranný*, a poneváč všetky jeho štyri uhly sú pravé, preto je *pravouhlý*.

Spojíme-li u nejakého štvorca vrcholy dvoch oprotno ležiacich uhlov prímkou, rozpadne sa na dva rovnaké trojuhelníky, o čom sa presvedčíme, jestli ich na pr. z papieru vyrežeme a jeden na druhý tak že sa kryjú položíme. Túto, vrcholy oprotno ležiacich uhlov spojujúcu prímku, menujeme *priečnicou* (diagonálou). Priečnica poltí štvorcom uzavretú plochu; obdržané polovice štvorca sú trojuhelníky.

Poneváč otázne trojuhelníky, keď ich ostrými a pravými uhlami *akokoľvek* jeden *na druhý* položíme, sa cele kryjú, preto sú ich ostré uhly rovnaké, a síce 45^0 veľké. Otázna priečnica poltí tedy, nielen plochu štvorca, lež i jeho dva oprotné uhly.

A poneváč každý z povstalých trojuhelníkov má jeden pravý či 90^0 veľký a dva ostré po 45^0 majúce uhly, preto všetky tri uhly u každého ztýchto trojuhelníkov majú dovedna $90^0 + 45^0 + 45^0 = 180^0$.

Keďže ale uhly štvorca sú pravé či 90^0 veľké, preto stoja ktorékoľvek *dve susedné strany štvorca jedna na druhej kolmo.* Predstavuje-li jedna zo strán štvorca na pr. spodnia (CD) jeho dĺžku, predstavuje druhá súsedná BD jeho šírku. A poneváč tieto sú rovnaké, preto má štvorec rovnakú dĺžku a šírku.

Pomenujeme-li spodniu stranu štvorca, na ktorej si ho stáť myslíme, či dĺžku *základnou*, tedy znamená súsedná šírku predstavujúca strana jeho *výšku*. A poneváč obe sú rovnaké, preto *má štvorec toľkú základnú stranu ako výšku* a naopak, výška je u štvorca toľká, ako základná strana.

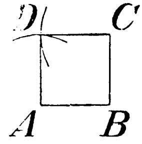
Sčítame-li vsetky štyri strany nejakéko štvorca dovedna, obdržíme jeho *obvod*. Keďže ale u štvorca všetky štyri strany sú rovnaké, preto obvod štvorca vyhľadáme, jestli *jednu zo strán* t. j. tejto zodpovedajúcu dĺžku, *štyrikráť vezmeme*. Má-li jedna zo strán nejakého štvorca na pr. 3 *dm*, obnáša jeho obvod 4×3 *dm* či 12 *dm*. A poneváč obvod u nejakého štvorca je 4-kráť väčší nežli jedna strana, preto i naopak, jedna strana štvorca je štyrikráť menšia nežli jeho obvod.

Z tohoto zas vyplýva, že *z obvodu štvorca, dĺžku jednej zo strán najdeme, jestli celý obvod 4-ma delíme.* Má-li nejaký štvorec v obvode na pr. 28 *m*, obnáša jedna z jeho strán $28 : 4 = 7$ *m*.

Ako sme už riekli, $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle BCD$ sú u štvorca $ABCD$ rovnaké; *(Obr. 65.)* oba tieto uhly sú avšak vnútorné krížové či striedavé uhly a preto je strana AB rovnobežná so stranou CD. (Viď § 16.).

Podobne $\sphericalangle ACB = — CBD$; oba tieto uhly sú však tiež vnútorné krížové či striedavé uhly, a preto sú i strany AC a BD rovnobežné. Z tohoto vyplýva, *že u štvorca, každé dve protistojné strany sú rovnobežné.* Jestli ale u nejakého štvoruhelníka všetky protistojné strany sú rovnobežné, v tom prípade menujeme ho *rovnobežníkom. Štvorec je tedy rovnobežník* (Parallelogram).

Štvorec sostrojíme, jestli u jedneho konca nejakej ľubovoľnej prímky na pr. prímky AB (*Obr. 66.*) toľkú kolmú ako je AB (na pr. BC) postavíme a tým istým otvorom kružidla, koľká je AB alebo BC, ako z bodu A, tak i z bodu C, obluky opíšeme, a bod D, v ktorom sa tieto režú, ako s bodom A, tak i s bodom C dovedna spojíme. Týmto spôsobom povstalý štvoruhelník má štyri rovnaké strany a štyri pravé uhly, je tedy štvorec.



Obr. 66.

Štvorec a vôbec štvorhelník označujeme štyrma, a trojuhelník troma literami, ktoré u vrcholu uhlov píšeme, a v tom poriadku, v akom jedna po druhej nasledujú, vyslovujeme. Tak na pr. na obr. 65. nalezajúci sa štvorec možno takto označiť: $ABDC$ alebo $ACDB$, alebo $CBDA$ alebo $BACD$. Jednotlivé trojuhelníky ale, z ktorých pozostáva, takto $\triangle\ ACB$, alebo $\triangle\ ABC$, alebo $\triangle\ CBA$, atď., potom $\triangle\ CBD$, alebo $\triangle\ CDB$, alebo $\triangle\ BCD$ atď.

Dľa horuaaného vysvetlenia je:

$$ABDC = \triangle\ ABC + \triangle\ CBD;\ ABDC = 2\ ABC$$
$$ABDC - \triangle\ ABC = \triangle\ CBD;\ ABDC = 2\ BCA$$
$$\tfrac{1}{2}\ ABDC = \triangle\ ABC \text{ alebo } \tfrac{1}{2}\ ABDC = \triangle\ CBD.$$

Z tohoto vyplýva: *že i ohraničené rovné plochy* (roviny), *cele tak, ako prímky, možno sčítať, odčítať, násobiť a deliť.*

Načiarame-li do nejakého štvorca dve priečnice, rozpadne sa na štyri trojuhelníky. Urob to! Vyrežeme-li otázne trojuhelníky z papieru a položíme-li ich jeden na druhý, zkúsime:

že sa celé kryjú, či že sú rovnaké; ďalej, že všetky štyri priečnicami uzavreté uhly sú pravé a že preto stoja otázne priečnice jedna na druhej kolmo; konečne, že sa vzájomne poltia.

Úlohy. 1. Nakresli 5 *cm* dlhú prímku vo vódorovnej polohe a na ňu štvorec! — *Koľkoraké* strany a koľkoraké uhly má nakreslený a vôbec každý štvorec? — *Koľko cm* majú všetky strany či koľký obvod má nakreslený štvorec? — *Koľko* stupňov dovedna majú všetky jeho štyri uhly? — *Ako* menujeme tú prímku, ktorá delí štvorec na dva rovnaké trojuhelníky? — *Koľko* ostrých a koľko pravých uhlov má každý z týchto trojuhelníkov? — *Koľko* stupňov majú všetky tri uhly u otáznych trojuhelníkov? — *Ako* stoja u štvorca ktorékoľvek dve susedné strany jedna na druhej? — *Ktorú* stranu štvorca menujeme základnou? a ktorú výškou? — *Ako* stojí výška na základnej u štvorca? — *Prečo* sú protistojné strany štvorca rovnobežné? — *Ako* menujeme štvoruhelníky, u ktorých všetky protistojné strany sú rovnobežné? atď.

2. Nakresli 7 *cm* dlhú prímku v kosmej polohe a na ňu štvorec! Rozdeľ otázny štvorec priečnicou na dva trojuhelníky!

Na koľko trojuhelníkov rozpadne sa celý tento štvorec, jestli doň dve priečnice načiarame?

3. Vyrež všetky tieto štyri trojuhelníky z papieru a oprobuj, či jeden na druhý položené sa cele kryjú?

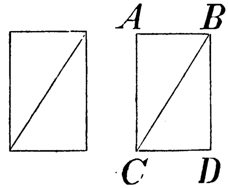
Koľká časť z celého štvorca je jeden z týchto trojuhelníkov? *Ako* možno štvorec na štyri rovnaké trojuhelníky rozdeliť? *Ako* na osem? a na šestnásť?

4. Nakresli štvorec jehož strany sú 15 *cm* dlhé v zmenšenom spôsobe, dľa pomeru 10 : 1.

Koľko cm-ov obnáša jedna strana, dľa tohoto pomeru nakresleného štvorca? — *Koľkokrát* menej nežli u prvého?

b) *Obďalník.*

Obďalníkom menujeme taký štvoruhelník, ktorý má dvojaké dve kratšie a dve dlhšie strany a štyri pravé uhly. Obďalník znázorňuje (*Obr. 67.*) bo $AC = BD$, a $AB = CD$ a $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^{\circ}$. Ako kratšie, tak i dlhšie strany stoja u obďalníka jedna druhej oprotno a sú rovnaké.



Obr. 67.

Poneváč obďalník má nerovnodlhé strany, preto je *nerovnostranný*, a poneváč má samé pravé uhly, preto je *pravouhlý*.

Podobu obďalníka majú izebné dvere, obrazy, obločné tably, role, dosky, podlaha a povala izby atď.

Spojíme-li u obďalníka vrcholy dvoch protistojných uhlov na pr. B a C priečnicou, rozpadne sa na dva trojuhelníky. Vyrežeme-li otázne trojuhelníky z papieru a položíme-li oba jeden na druhý tak, že $\sphericalangle ABC$ padne na $\sphericalangle BCD$, a $\sphericalangle ACB$ na $\sphericalangle CBD$, tedy sa kryjú. Z tohoto vyplýva, *že priečnica delí obďalník na dva rovnaké trojhrany, či na dve pravé polovice.*

Keďže ale obďalník má samé pravé uhly, preto stoja jeho ktorékoľvek dve susedné strany, jedna na druhej kolmo. Predstavuje-li jedna z týchto strán na pr. BD jeho šírku, predstavuje druhá susedná na pr. CD jeho dĺžku. Dĺžka a šírka sú u obďalníka nerovnoveľké.

Pomenujeme-li jednu zo strán obďalníka, na pr. CD, na ktorej stojí, *základnou*, predstavuje druhá susedná na pr. BD jeho *výšku*. Obďalník má rozdielnoveľkú základnú stranu a výšku.

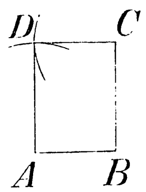
Sčítame-li všetky štyri strany obďalníka dovedna, obdržíme jeho celý obvod, sčítame-li dve jeho nerovné strany, obdržíme jeho polobvod. Známe-li polobvod nejakého obďalníka, vtedy známe súčet zo šírky a dĺžky. A preto, odčítame-li z polobvoda šírku, zvýši dĺžka a naopak. Obnáša-li polobvod na pr. 20 *m* a šírka 8 *m*, tedy je dĺžka $20\ m - 8\ m = 12\ m$.

Pri položení horotáznych, z papieru vystrihnutých trojuhelníkov jeden na druhý, presvedčili sme sa, že $\sphericalangle ABC$ je toľký, ako $\sphericalangle BCD$.

Oba tieto uhly sú ale vnútorné striedavé uhly, následkom čoho sú strany AB a CD rovnobežné. Podobne je ∢ ACB toľký, ako CBD; oba tieto uhly sú však tiež vnútorné striedavé následkom čoho je i strana AC rovnobežná s BD. Poneváč ale všetky protistojné strany sú u obdĺžnika rovnobežné, preto je i obdĺžnik *rovnobežník*.

Keďže ale obdĺžnik $ABDC$ je rovnobežník, tak ∢ B a ∢ D a podobne i ∢ A a ∢ C sú také súvislé uhly, ktoré majú po 180°. Viď § 16. Dľa tohoto všetky štyri uhly obdĺžnika musejú mať dovedna 2krát 180 či 360° a všetky tri uhly každého trojuhelníka 180°, bo tieto sú v oboch rovnako rozdielne.

Obdĺžnik nakreslíme, jestli najprv jednu zo strán na pr. AB (*Obr. 68.*) načiarame a v niektorom z jej konečných bodov na pr. v B, kolmú na ňu postavíme a z tejto toľký kus odrežeme, koľká je jeho druhá strana, na pr. BC; na to z bodu A, dialke či strane BC a z bodu C, dialke či strane AB zodpovedajúcimi otvory kružidla, obluky opíšeme a povstalý priesečný bod D, ako s bodom C, tak i s bodom A spojíme.



Obr. 68.

Na základe horpovedaného (*obr. 67.*) je:

$$ABDC = \triangle ABC + \triangle BCD;\ ABDC - \triangle ABC = \triangle BCD.$$
$$2 \triangle ABC \text{ alebo } 2 \triangle BCD = ABDC \text{ a naopak, } ABDC = 2 \triangle ABC.$$
$$\tfrac{1}{2} ABDC = \triangle ABC \text{ alebo } \tfrac{1}{2} ABDC = \triangle BCD.$$

Načiarame-li do nejakého obdĺžnika dve priečnice, rozpadne sa na štyri trojuhelníky. Urob to! Vyrežeme-li otázne trojuhelníky z papieru a položíme-li ich jeden na druhý, zkúsime:

že každé dva vstričné či oprotné kryjú sa; ďalej, *že priečnicami uzavreté uhly sú kosmé a že preto i obe priečnice stoja jedna na druhej kosmo;* konečne, *že sa vzájomne poltia* či že všetky ich štyri polovice sú rovnodlhé.

Úlohy. 1. Nakresli obdĺžnik, jehož základná strana má 5 *cm* a výška 8 *cm!* Ako to prevedieš?

Koľkoraké uhly a koľkoraké strany má nakreslený a vôbec každý obdĺžnik? — *V čom* srovnáva sa obdĺžnik so štvorcom? — *Koľký* je nakresleného obdĺžnika obvod?

2. Nakresli obdĺžnik, jehož celý obvod obnáša 24 *cm* a základná strana 8 *cm!*

Oko vyhľadáme výšku obdĺžnika z polobvodu?

3. Rozdeľ nakreslený obdĺžnik priečnicou na dva trojuhelníky!

Oké sú obdržané trojuhelníky čo do veľkosti? — *Koľkoraké* ostré uhly nachodia sa v jednom každom z nich? — *Ktoré* z ostrých uhlov sú v oboch rovnaké? — *Ktoré* z ostrých uhlov sú striedavé? — *Prečo* menujeme obdĺžnik rovnobežníkom? — *Prečo* sú jeho protistojné strany rovnobežné? — *Koľko* stupňov majú všetky tri uhly v každom z jeho trojuhelníkov? — *Koľko* trojuhelníkov obdržíme, jestli dve priečnice do obdľalníka načiarame? — *Ktoré* z obdržaných trojuhelníkov sú rovnaké? Vyrežme ich z papieru a položme jeden na druhý!

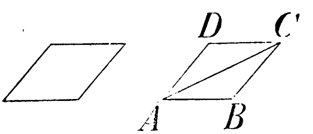
4. Nakresli zmenšeno, a síce v pomere 100 : 1 taký obdľalník, jehož jedna strana má v skutočnosti 6 *m* a druhá 9 *m* 5 *dm*. *Koľko cm* má kratšia a *koľko cm* dlhšia strana, zmenšeného obdľalníka? Odp. (6 *cm*, 9 *cm* 5 *mm*.).

5. Nejaká zahrada obdľalníkovej podoby je 18 *m* široká a 26 *m* dlhá; koľký je jej obvod? Odp. 88 *m*.

6. Výška nejakých dverí obnáša 1.64 *m* a šírka 0.85 *m*, koľký je ích obvod? Odp. 4.98 *m*.

c) *Kosoštvorec* (Rhombus).

Kosoštvorcom menujeme taký štvoruhelník, ktorý má rovnaké strany a dvojaké dva tupé a dva ostré uhly. *(Obr. 69.)*.



Obr. 69.

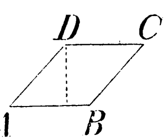
Ako tupé, tak i ostré uhly stoja si oprotno. Strana $AB = BC = CD = AD$. $\sphericalangle B = \sphericalangle D$ = a $\sphericalangle C = \sphericalangle A$.

Poneváč kosoštvorec má rovnaké strany, preto je *rovnostranný*, a poneváč má kosmé uhly, preto je *kosouhlý*.

Spojíme-li u kosoštvorca vrcholy dvoch oprotných uhlov, na pr. vrcholy ostrých uhlov A a C priečnicou, rozpadne sa na dva trojuhelníky, ktoré svojimí tupými a ostrými uhlami jeden na druhý položené sa cele kryjú. Z tohoto vyplýva, že *priečnica poltí kosoštvorec, a že povstalé polovice sú trojuhelníky.*

Poneváč otázne trojuhelníky, akokoľvek ich svojimi ostrými uhlami jeden na druhý položíme, sa cele kryjú, preto sú u oboch trojuhelníkov všetky ostré uhly rovnaké. Otázna priečnica tedy poltí nielen plochu kosoštvorca, lež i jeho dva oprotné uhly.

Poneváč ale u kosoštvorca, dve susedné strany nestoja jedna na druhej kolmo ale kosmo, preto, jestli jedna z oboch predstavuje dĺžku, tá druhá nemôže znamenať šírku, bo dĺžka a šírka stoja vždy jedna na druhej kolmo. Značí-li tedy jedna zo strán kosoštvorca na pr. *AB (Obr. 70.)* dĺžku, tedy jeho šírku najdeme, jestli z oprotnej strany na ňu kolmú, na pr. *DE*, spustíme.



Obr. 70.

Taktiež, predstavuje-li jedna so strán kosoštvorca, na pr. *AB* základnú, tedy jeho výšku najdeme, jestli na poslednú, z oprotnej strany kolmú na pr. *DE*, spustíme.

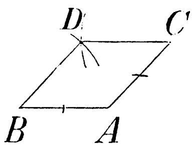
Kosoštvorec má síce ako štvorec, rovnaké strany, no rozdielnoveľkú šírku a dĺžku, a preto i rozdielnoveľkú základnú stranu a výšku.

Všetky štyri strany kosoštvorca dovedna tvoria jeho obvod. A poneváč sú rovnaké, preto jeho obvod najdeme, jestli niektorú zo strán, jej dĺžku, 4-ma násobíme. A naopak, z obvodu jednej strany, dĺžku vyhľadáme, jestli tamten 4-ma delíme.

Ako sme hore znázornili, $\sphericalangle\ DCA = \sphericalangle\ CAB$ (*obr. 69.*) oba tieto uhly sú však vnútorné striedavé a preto sú strany DC a AB rovnobežné. Podobne, $\sphericalangle\ DAC$ a $\sphericalangle\ ACB$ sú tiež rovnaké. Oba tieto uhly sú avšak tiež vnútorné striedavé a preto je i strana AD s BC rovnobežná. Viď § 16. Ponevác ale protistojné strany u kosoštvorca sú rovnobežné, preto je ***kosoštvorec rovnobežník.***

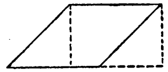
Keďže ale kosoštvorec $ABCD$ (*obr. 69.*) je rovnobežník, tak $\sphericalangle\ A$ a $\sphericalangle\ D$ a podobne i $\sphericalangle\ B$ a $\sphericalangle\ C$ sú tak súvislé uhly, ktoré majú dovedna po 180^0, následkom čoho na všetky štyri uhly či na $\sphericalangle\ A + \sphericalangle\ B + \sphericalangle\ C + \sphericalangle\ D$ pripadne 360^0. Majú-li ale všetky uhly kosoštvorca 360^0, tedy na tri uhly, ktoréhokoľvek z oboch trojuhelníkov, pripadne 180^0.

K sostrojeniu alebo k odkresleniu nejakého kosoštvorca musíme znať: dĺžku niektorej strany a niektorý z uhlov, ostrý, alebo tupý. Má-li jedna zo strán na pr. 2 *cm* a tupý uhol 120^0: nakreslíme 120^0 veľký uhol a odrežeme z oboch jeho ramien po 2 *cm*, na pr. AB a AC a týmto istým otvorom kružidla, opíšeme ako z bodu C tak i z bodu B ohluky, ktorých priesečný bod D spojíme ako s bodom B tak i s bodom C (*obr. 71.*).



Obr. 71.

Postavíme-li u oboch koncov základnej strany kosoštvorca dve kolmé, a predĺžime-li základnej oprotnú stranu (*obr. 72.*) až ku prvej kolmej, obdržíme pravouhelný obdľalník, ktorý má tú istú základnú stranu a tú istú výšku ako otázny kosoštvorec. Oba tieto štvoruhelníky sú rovnaké, o čom veľmi snadno sa presvedčíme, jestli na pravej strane obrázca nalezajúci sa trojuhelník z papieru vyrežeme a ho na ľavo v ležiaci položíme. Z tohoto vyplýva, že ***kosoštvorec, čo do veľkosti, rovná sa obdľalníku, ktorý má s ním rovnú základnú stranu a rovnú výšku.*** Týmto spôsobom možno z kosoštvorca, s ním rovný obdľalník urobiť či kosoštvorec na obdľalník premeniť.



Obr. 72.

Z obrázca 69 vyplýva, že:

$\triangle\ ABC + \triangle\ ADC = ABCD;\ ABCD - \triangle\ ABC = \triangle\ ADC;\ 2\ \triangle\ ADC$ alebo $2\ \triangle\ ABC = ABCD;\ {}^1/_2\ ABCD = \triangle\ ADC$ alebo $\triangle\ ABC.$

Načiarame-li do nejakého kosoštvorca dve priečnice, rozpadne sa ako štvorec na štyri *rovnaké* trojuhelníky, o čom sa presvedčíme, jestli ich z papieru vystrihneme a jeden na druhý položíme.

Podobne zkúsime, že všetky štyri priečnicami uzavreté uhly sú u kosoštvorca pravé, a že preto obe priečnice stoja jedna druhej kolmo a že sa vzájomne poltia.

Úlohy. 1. Nakresli kosoštvorec, ktorého jedna strana má 5 *cm* a jeden z ostrých uhlov 35°!

Koľkoraké uhly a koľkoraké strany má nakreslený a vôbec každý kosoštvorec? Koľko stupňov má jeho tupý uhol? *Ako* stoja dve susedné strany kosoštvorca jedna na druhej? — *V čom* podobá sa kosoštvorec štvorcu? — a v čom liší sa od neho? — Vyhľadaj u nakresleného kosoštvorca výšku! — Ako stojí táto výška na základnej strane?

2. Nakresli kosoštvorec jehož tupý uhol má 140° stupňov a strana 4 *cm* a spoj vrcholy oboch tupých uhlov priečnicou!

Na koľko trojuhelníkov delí priečnica celý kosoštvorec? — *Aké* sú tieto trojuhelníky čo do veľkosti? — *Koľko* stupňov má každý ostrý uhol u tohoto kosoštvorca? — *Koľko* stupňov má každý ostrý uhol u jeho trojuhelníkov? — *Koľko cm*-ov obnáša celý obvod nakresleného kosoštvorca? — *Ktoré* z ostrých uhlov u oboch trojuhelníkov sú vnútorné striedavé? — *Ktoré* strany kosoštvorca sú rovnobežné? a prečo? *Ako* menujeme štvoruhelníky, u ktorých protistojné strany sú rovnobežné? — *Koľko* trojuhelníkov obdržíme, jestli v otáznom kosoštvorci vrcholy oboch ostrých uhlov dovedna spojíme? — *Aké* sú tieto trojuhelníky čo do veľkosti? Vystrihni ich z papieru a polož jeden na druhý, tak že sa kryjú! — *Koľká* časť z celého kosoštvorca je jeden z obdržaných trojuhelníkov? — *Ako* možno nejaký kosoštvorec na 4 rovnaké trojuhelníky rozdeliť?

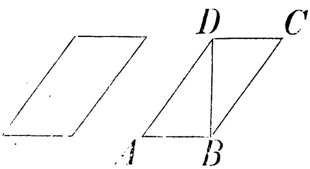
3. Odkresli zmenšeno, dľa pomeru 10 : 1 kosoštvorec, jehož strana má 4 *dm* a tupý uhol 105°?

Koľko cm má zmenšeného kosoštvorca strana? *Koľko cm* obnáša zmenšeného kosoštvorca obvod? *Koľkokrát* menej nežli pôvodného?

4. Nakresli ľubovoľne veľký kosoštvorec a premeň ho na obdĺžnik s ním rovnej veľkosti! Ako to prevedieš? Obr. 72.

d) *Kosodľalník* (Rhomboid).

Pod kosodľalníkom rozumieme takový štvoruhelnik, ktorý má dvojaké, dve kratšie a dve dlhšie strany, a dvojaké, dva tupé a dva ostré uhly. Kosodľalník znázorňuje (*obr. 73.*) $AB = DC$ a $AD = BC$; $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ a $\sphericalangle B = \sphericalangle D$. Ako rovnaké strany tak i rovnaké uhly ležia jedno druhému oproti.



Obr. 73.

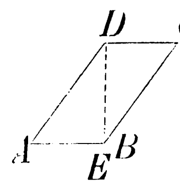
Poneváč kosodľalník má nerovnaké strany preto je *nerovnostranný*, a poneváč má kosé uhly, preto je *kosouhlý*.

Spojíme-li dva ktorékoľvek oprotné uhly kosoďalníka priečnicou. rozpadne sa na dva trojuhelníky, ktoré z papieru vystrihnuté a jeden na druhý položené, sa cele kryjú. Priečnica poltí kosoďalník na dve rovné časti či na dva rovnaké trojuhelníky.

Srovnáme-li uhly obdržaných trojuhelníkov jeden s druhým, zkúsime, že ∢ ABD je toľký ako ∢ BDC. Oba tieto uhly sú však vňútorné striedavé, následkom čoho strany AB a DC sú rovnobežné. (Viď § 16.) Podobne i ∢ ADB je toľký ako DBC; oba tieto uhly sú však tiež vnútorné striedavé, preto sú i strany AD a BC jedna s dvuhou rovnobežné. Poneváč ale protistojné strany kosoďalníka sú rovnobežné, preto je kosoďalník tiež *rovnobežník.*

Keďže ale kosoďalník $ABCD$ *(obr. 73.)* je rovnobežník, tak ∢ A a ∢ B a podobne: ∢ C a ∢ D sú takové súvislé uhly, ktoré majú dovedna po 180°, následkom čoho všetky štyri uhly či ∢ A + ∢ B + ∢ C + ∢ D musia mať 360°. Majú-li ale všetky tieto štyri uhly 360°, tedy na tri uhly, ktoréhokoľvek z oboch trojuhelníkov, pripadne 180°, bo tieto sú v oboch trojuhelníkoch rovnako rozdielne.

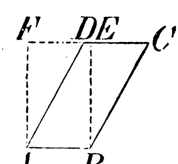
Poneváč uhly kosoďalníka nejsú pravé, preto stoja dve jeho susedné strany jedna na druhej kosmo, a preto znamená-li jedna, z nich na pr. AB jeho dĺžku, tak susedná BC neznamená jeho šírku. Túto obdržíme, jestli na dĺžku z oprotnej strany (DC) kolmú na pr. DE spustíme. *Obr. 74.* Podobne, je-li jedna zo strán na pr. AB základná, tak na túto z oprotnej strany spustená kolmá na pr. DE je výška.



Obr. 74.

Všetkých štyroch strán dovedna sčítané dĺžky dajú celý obvod, dvoch susedných polobvod.

Predĺžime-li u kosoďalníka $ABCD$ *(obr. 75.)* stranu DC v ľavo a postavíme-li u oboch koncov základnej AB, kolmé BE a AF, obdržíme obďalník $ABEF$. Poneváč z kosoďalníka v pravo odrezaný trojuhelník je toľký ako v ľavo povstalý, preto oba tieto štvoruhelníky sú rovnaké či kosoďalník $ABCD$ = obďalníku $ABEF$. Koľko sme na pravej strane z kosoďalníka odrezali, toľko sme na ľavej pridali. Oba tieto štvoruhelníky majú rovnú základnú stranu a rovnakú výšku.

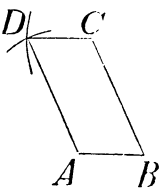


Obr. 75.

Z tohoto vyplýva, že ***kosoďalník rovná sa obďalníku, ktorý má s ním rovnú základnú stranu a rovnú výšku***, a že kosoďalník možno na obďalník premeniť.

K sostrojeniu alebo k odkresleniu nejakého kosoďalníka musíme znať jednu, z dlhších a jednu z kratších strán a jeden z uhlov

Má-li jedna zo strán na pr. 3 *cm* a druhá 5 *cm* a jeden z uhlov na pr. ∢ *ABC* 60°; nakreslíme 60° veľký uhol a z jedneho jeho ramena odrežeme 3 *cm* a z druhého 5 *cm* veľký kus (*obr. 76*) na pr. *AB* a *BC*. Na to z konečného bodu *A*, dialke *BC* a z konečného bodu *C*, dialke *AB* zodpovedajúcimi otvorami kružidla opíšeme obluky, ktorých priesečný bod *D*, spojíme ako s *A* tak i s *C*.



Obr. 76.

Na základe horudaného vysvetlenia (*obr.* 73.) je kosoďalník: $ABCD = \triangle ABD + \triangle BDC$; $\frac{1}{2} ABCD = \triangle ABD$ alebo $\triangle BDC$; $2 \times \triangle ABD$ alebo $2 \times \triangle BDC = ABCD$.

Načiarame-li do nejakého kosoďalníka dve priečnice, rozpadne sa ako obdĺalník na štyri trojuhelníky, z ktorých každé dva oprotné či vstríčné sú rovnaké, o čom tak sa presvedčíme, jestli ich z papieru vyrežeme a jeden na druhý položíme. Podobne zkúsime, že priečnicami uzavreté uhly sú kosé, a že preto obe priečnice stoja jedna na druhej koso a že sa vzájomne poltia.

Úlohy. 1. Nakresli kosoďalník, jehož jedna strana má 3 *cm* a druhá 6 *cm* a nimi uzavretý uhol 50°. Ako to prevedieš?

Ktorý štvoruhelník menujeme kosoďalníkom? — *Koľkoraké* má kosoďalník strany a uhly? — *Aké* sú u kosoďalníka protistojné strany a protistojné uhly? — *V čom* podobá sa kosoďalník obdĺalníku? atď.

2. Nakresli ľubovolne veľký kosoďalník a spoj vrcholy oboch tupých uhlov priečnicou.

Na koľko trojuhelníkov rozpadne sa celý kosoďalník?

Koľká časť kosoďalníka je jeden z obdržaných trojuhelníkov? — *Koľkokrát* je väčší celý kosoďalník nežli jeden alebo druhý z týchto trojuhelníkov? — *Ktoré* uhly sú u týchto oboch trojuhelníkov rovnaké? — *Ktoré* z týchto uhlov sú striedavé? — *Prečo* sú protistojné strany kosoďalníka rovnobežné? (Viď § 16.). *Koľko* trojuhelníkov obdržíme, jestli do kosoďalníka dve priečnice načiarame? — *Ktoré* z týchto štyroch trojuhelníkov sú rovnaké? — *Ako* vyhľadáme výšku kosoďalníka?

3. Odkresli zmenšeno, dľa pomeru 100 : 1 kosoďalník, ktorého jedna strana má 8 *m* a druhá 12 *m* a nimi uzavretý uhol 65°.

Koľko cm obnášajú jednotlivé strany zmenšeného kosoďalníka? — *Koľký* je jeho obvod? — Aké sú ich uhly? t. j. pôvodného a zmenšeného kosoďalníka? (Rovnaké).

4. Nakresli ľubovoľný kosoďalník a premeň ho na tej istej veľkosti obdĺalník! *Ktoré* kosoďalníky a obdĺalníky sú rovnaké? *Obr. 75.*

Všetky štyri dosiaľ znázornené a opísané štvoruhelníky sú *rovnobežníky* čili parallelogramy.

Ponevác u prvých dvoch či u štvorca a u obdĺalníka všetky uhly sú pravé, preto menujeme ich *pravouhlými* a ponevác u kosoštvorca a kosoďalníka všetky uhly sú kosé, preto menujeme tieto dva posledné *kosouhlými* rovnobežníkami.

Otázky. U ktorých rovnobežníkov sú šírky a dĺžky, či základné strany a výšky toľké, ako dve susedné strany? — U ktorých musíme šírku alebo výšku o sebe vyhľadať? — *Ako* musí stáť šírka na dĺžke, alebo výška na základnej strane?

Ktoré z týchto štvoruhelníky možno jeden na druhý premeniť?

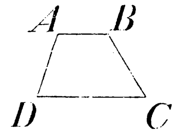
Koľko stupňov obnášajú všetky štyri uhly u každého rovnobežníka?

Koľko stupňov majú všětky tri uhly, u každého z ich trojuhelníkov?

U ktorých stoja obe priečnice jedna na druhej kolmo a ktorých kosmo?

Lichobežník (Trapez).

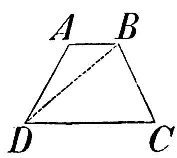
Štvoruhelník, u ktorého len dve strany sú rovnobežné, menujeme *lichobežníkom.* Lichobežník znázorňuje obr 77., bo $AB \parallel DC$. Jedna z rovnobežných strán lichobežníka je vždy kratšia než druhá. Uhly lichobežníka môžu byť: pravé, ostré a tupé, alebo len ostré a tupé. Jestli nerovnobežné strany lichobežníka sú rovnaké, tenkrát menujeme ho *rovnostranným. (Obr. 78.) ABCD* lichobežník je rovnostranný, bo $AD = BC$. U rovnostranného lichobežníka sú jako tupé tak i ostré uhly rovnaké. $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ a $\sphericalangle D = \sphericalangle C$. Príklad rovnostranného lichobežníka podáva nám kolmý prierez nejakej priekopy, dvere na štolni atď.



Obr. 77.

Obvod lichobežníka najdeme, jestli, jako u druhých predošlých štvoruhelníkov, všetky štyri strany t. j. týchto dĺžky dovedna sčítame. Tak na pr. obvod lichobežníka $ABCD =$ $= AB + BC + CD + DA$.

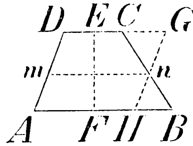
Vrcholy protistojných uhlov spojujúca priečnica delí lichobežník na dva nerovné trojuhelníky. *(Obr. 78.)*



Obr. 78.

Poneváč lichobežník je pri spodku dlhší a pri vrchu kratší (alebo naopak), preto má rozdielnu dĺžku, no rovnakú šírku. Túto poslednú obdržíme, jestli z vrchnej rovnobežnej na spodnú kolmú spustíme, na pr. *EF. (Obr. 79.)*

Rozdelíme-li u lichobežníka nerovnobežné strany na dve rovné časti a spojíme-li deliace body *m* a *n* prímkou, obdŕžíme tak zvanú *strednú* dĺžku *mn* Pomenujeme-li prímku *mn* jeho *strednou základnou* stranou, tenkrát predstavuje šírka *EF* jeho výšku.



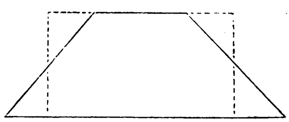
Obr. 79.

Načiarame-li cez bod *n* so stranou *AD* rovnobežnú *GH*, obdržíme rovnobežník *AHGD*, ktorý sa, čo do veľkosti, rovná lichobežníku $ABCD$; bo $\triangle$ HBn je toľký jako $\triangle$ CGn, o čom sa snadno presvedčíme, jestli ich vystrihneme a jeden na druhý položíme. Koľko sme dolu odňali, toľko sme hore pridali.

Obdržaný rovnobežník $AHGD$, už či je tenže kosoštvorec a či kosodľalník, možno, jako už známe, ešte na obdľalník premeniť, ktorého základná strana je toľká jako AH a výška toľká jako EF. Spôsob tohoto premerania znázorňujú obr. 72. a 75. a preto ho tu vynechávame.

Ponevač ale prímka AH je toľká jako stredná základná mn, preto miesto AH môžme vziať mn. Otázneho hľadaného obdľalníka základná je tedy toľká jako mn a výška jako EF. Z tohoto vyplýva, že *lichobežník rovná sa čo do veľkosti takému obdľalníku, ktorý má s ním rovnú výšku a za základnú stranu toľkú prímku, koľká je stredná základná lichobežníka.*

Dľa tohoto nejaký lichobežník i tak ešte na obdľalník premeníme, jestli, jako u obr. 80., obe nerovnobežné strany otázneho lichobežníka poltíme a cez poltiace body dve kolmé na základnú postavíme, a jestli kratšiu rovnobežnú stranu, jej oba konce, až po tieto kolmé predlížime.



Obr. 80.

Týmto pokračovaním odpadnú z lichobežníka dolu dva trojuhelníky, no miesto nich pribudnú hore dva práve toľké. Koľko odnímeme, toľko pridáme.

Ponevač strany AB a DC u lichobežníka $ABCD$ (*Obr. 77.*) sú rovnobežné, preto súvislé uhly B a C ako i uhly A a D majú po 180^0. Známe-li jeden z ostrých uhlov na pr. $\sphericalangle C$, tedy k nemu patriaci súvislý $\sphericalangle B$ možno snadno vypočítať. Má-li $\sphericalangle C$ na pr. 60^0, tak $\sphericalangle B$ má 120^0, bo $60^0 + 120^0 = 180^0$.

U rovnostranného lichobežníka (*obr. 78.*) dostačí známosť i len jedneho z uhlov k vypočítaniu všetkých ostatných.

Ponevač ale každý lichobežník obsahuje v sebe dva páry takých súvislých uhlov, ktoré majú po 180^0, preto všetky štyri uhly lichobežníka majú dovedna 360^0.

K odkresleniu nejakého lichobežníka na pr. $ABCD$ (*Obr. 77.*) dostačí známosť všetkých štyroch strán a jedneho z uhlov. Tak na pr. otázny lichobežník (*Obr. 77.*) odkreslíme, jestli na pr. uhol C sostrojíme a z jeho ramien dialky či strany DC a BC odrežeme; na to z bodu D dialke AD a z bodu B dialke AB zodpovedajúcim otvorom kružidla obluky opíšeme, a priesečný bod A ako z bodom D, tak i s bodom B, dovedna spojíme.

Úlohy. 1. Nakresli dve rovnobežné prímky rozdielnej veľkosti a spoj ako na pravej, tak i na ľavej strane, ich konečné body prímkami!

Čo predstavuje nakreslený obrázec, aký štvoruhelník? — *Ktoré* štvoruhelníky menujeme lichobežníkami? — *Ktorý* lichobežník menujeme rovnostranným? — *Koľkoraké* strany a uhly má nerovnostranný? a rovnostranný lichobežník? — *Prečo* majú všetky štyri uhly lichobežníka 360°? — *Koľko* párov súvislých uhlov predstavujú všetky štyri? — *Ktoré* dva uhly lichobežníka majú 180°? — *Na koľko* trojuhelníkov delí priečnica lichobežník? — *Aké* sú tieto uhly čo do veľkosti?

2. Odkresli (v úlohe 1.) nakreslený lichobežník a vyhľadaj jeho strednú základnú stranu a jeho výšku?

Ako stojí výška na základnej strane? — *Ktorá* prímka predstavuje strednú základnú lichobežníka? (*Obr. 79.*)

3. Nakresli rovnostranný lichobežník jehož spodná rovnobežná strana má 8 *cm*, vrchná 4 *cm* a výška 5 *cm*! Ako to prevedieš?

Rozl. Najprv nakreslím spodnú rovnobežnú 8 *cm* dlhú, v jej stredu urobím kolmú 5 *cm* dlhú, v konečnom bode nakreslenej výšky postavím zas na túto kolmú a odrežem z nej, ako z prava, tak i z ľava po 2 *cm* na to spojím dovedna konečné body oboch rovnobežných prímok, ako na ľavej, tak i na pravej strane prímkami.

4. Nejakého rovnostranného lichobežníka spodná rovnobežná má 10 *m*, vrchná 6 *m* a výška 4 *m*, odkresli ho v zmenšenej miere dľa pomeru 100 : 1.

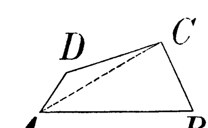
Koľko cm-ov bude mať jeho vrchná a spodná rovnobežná strana a jeho výška? (10 *cm*, 6 *cm*, 4 *cm*).

5. V úlohe 4. zmenšeno nakreslený rovnostranný lichobežník rozdeľ na dve rovné časti!

Rozlúštenie. Poltím obe rovnobežné strany a deliace body spojím prímkou.

f) *Rôznobežník* (Trapezoid).

Rôznobežníkam menujeme také štvoruhelníky, u ktorých všetky štyri strany majú rôzny smer, *Obr. 81.* Uhly rôznobežníka môžu byť rozdielne: pravé, tupé a ostré. Vrcholy dvoch oprotných uhlov spojujúca priečnica delí celý rôznobežník na dva nerovnoveľké trojuhelníky Všetky štyri strany dovedna činia jeho obvod.



Obr. 81.

Nejaký rôznobežnık *ABCD* odkreslíme, jestli najprv jeden z uhlov na pr. ∢ *B* odkreslíme t. j. prenesieme (Viď *obr. 54.*) a z jeho ramien dialky či strany *AB* a *BC* odrežeme, a potom z bodu *C* dialkou *DC* a z bodu *A* dialkou *AD* obluky opíšeme a priesečný bod *D* ako s *A* tak i s *C* bodom dovedna spojíme.

Podobne, tento istý rôznobežník ešte i tak odkreslíme, jestli najprv stranu *AB* načiarame a u jej jednoho konca ∢ *A* a u druhého ∢ *B* sostrojíme, na to zo slobodného ramena tamtoho uhlu dialku *AD* a zo slobodného ramena posledného uhlu dialku *BC* odrežeme a konečné body oboch posledných ramien prímkou DC dovedna spojíme.

Úlohy. 1.) Nakresli ľubovoľný rôznobežník a potom ho odkresli! Ako to prevedieš?

2. Sostroj rôznobežník, jehož strana $a = 5$ *cm*, $b = 6$ *cm*, nimi uzavretý uhol 70°, a strana $c = 8$ *cm*. $d = 9$ *cm*.

3. Nakresli v úlohe 1. odkreslený rôznobežník zmenšeno, dľa pomeru 2 : 1.

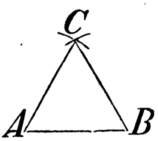
Rozl. Prenesiem jeden z uhlov a z každej strany nakresleného rôznobežníka vezmem polovicu, a sostrojím ostatok dľa horudaného prvého spôsobu.

§ 21. O trojuhelníkoch.

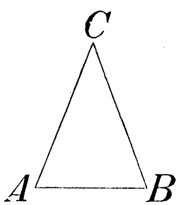
Ako už známe, troma prímkami uzavretý obrázec, menujeme *trojuhelníkom* či i *trojhranom* a jeho hraničné čiary *stranami.* Každý trojuhelník má tri uhly a tri strany.

Dľa pomernej dĺžky strán rozoznávame: *rovnostranné*, *rovnoramenné* a *nerovnostranné* trojuhelníky.

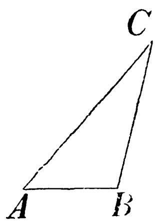
Rovnostranným trojuhelníkom menujeme taký, u ktorého všetky tri strany sú rovnaké *Obr. 82.* znázorňuje rovnostranný trojuhelník, bo $AB = BC = AB$.



Obr. 82.



Obr. 83.



Obr. 84.

Rovnoramenným taký, u ktorého len dve strany sú rovnaké a tretia od týchto kratšia alebo dlhšia. Otázne dve rovnaké strany menujeme jeho *ramenami. Obr. 83.* znázorňujetakýto trojuhelník AC a BC sú ramená $\measuredangle ABC$.

Nerovnostranný trojuhelník je konečne taký, u ktorého všetky tri strany sú nerovnodlhé. *Obr. 84.* znázorňuje nerovnostranný trojuhelník.

Úlohy. 1. Nakresli rovnostranný trojuhelník, ktorého každá strana má 4 *cm*! Ako to prevedieš?

Rozl. Nakreslím 4 *cm* dlhú prímku a z jej oboch konečných bodov opíšem 4 *cm* veľkým otvorom kružidla nad ňou alebo pod ňou dva obluky, ktorých priesečný bod spojím s konečnými bodami otáznej prímky. *Obr. 82.*

Koľko cm obnáša celý obvod či všetky tri strany tohoto trojuhelníka? — *Prečo* menujeme tento trojuhelník rovnostranným?

2. Nakresli rovnoramenný trojuhelník, ktorého ramená majú po 5 *cm* a tretia strana 3 *cm*!

Rozl. Najprv nakreslím 3 *cm* dlhú prímku a z oboch jej koncov opišem, nad alebo pod ňou, 5 *cm* veľkým otvorom kružidla dva obluky ktorých priesečný bod spojím s oboma koncami otáznej prímky.

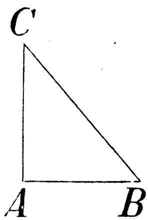
Prečo menujeme nakreslený trojuhelník rovnoramenným?

3. Nakresli nerovnostranný trojuhelník so stranami: 2 *cm* 3 *cm* a 4 *cm* veľkými!

Rozl. Najprv načiaram jednu zo známych strán, a potom, opíšem nad ňou z oboch jej konečných bodov druhej a tretej strane zodpovedajúcimi otvorami kružidla obluky a týchto priesečný bod spojím s koncami prvej strany

Dľa veľkosti uhlov, rozoznávame: *pravouhelné*, *ostrouhelné* a *tupouhelné* trojuhelníky.

Pravouhelným trojuhelníkom menujeme ten, u ktorého jeden z uhlov je pravý či 90° veľký (*Obr. 85.*). Pravý uhol uzavierajúce strany, ako sú *AC* a *AB*, menujeme katétami, a pravému uhlu oproti ležiacu, ako je na pr. *BC* menujeme hypotenúsou. Sú-li katéty rovnaké, tenkráť je otázny pravouhelný trojuhelník súčasne i rovnoramenný.



Obr. 85.

Ostrouhelným trojuhelníkom menujeme ten, ktorého všetky tri uhly sú ostré, t. j. od pravého menšie. Ostrouhelný trojuhelník je každý rovnostranný. *Obr. 82.* a na *obr. 83.* znázornený rovnoramenný.

Tupouhelným trojuhelníkom sluje zas ten, u ktorého jeden z uhlov je tupý na pr. *obr. 84.*

Úlohy. 1. Nakresli ľubovoľný pravouhelný trojuhelník s rovnakými katétami.

Rozl. Nakreslím pravý uhol, odrežem z oboch ramien rovnaké kusy a ich konečné body spojím jeden s druhým.

2. Nakresli tupouhelný trojuhelník, ktorého tupý uhol má 110° a z uzavierajúcich ho ramien je jedno dvakrát dlhšie než druhé!

Rozl. Nakreslím 110° veľký uhol a odrežem z jedneho ramena dvakrát toľký kus ako z druhého a spojím týchto konečné body dovedna prímkou. (Neurčitá úloha.)

3. Nakresli trojuhelníku, ktorého jeden z uhlov má 70° a druhý 80°!

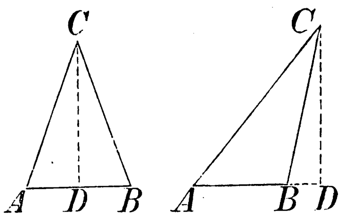
Rozl. Nakreslím ľubovoľnodlhú prímku a u jej jedneho konca odmeriam 70° a u druhého 80° veľký uhol, uhlomerom, a predĺžim ich slobodné ramená, kým sa nestyknú. (Neurčitá úloha.)

4. Nakresli jedno k druhému: štvorec, kosoštvorec, obdĺžnik, kosoďalník a polti každý jeden priečnicou!

Aké sú obdržané trojuhelníky: u štvorca? u kosoštvorca? u obďalníka? u kosoďalníka? *a)* čo do veľkosti strán, *b)* čo do veľkosti uhlov. *U ktorého* sú rovnoramenné? u ktorého rovnostranné? u ktorého nerovnostranné? u ktorého pravouhlé? u ktorého ostrouhlé? u ktorého tupouhlé? *Ktorého* rovnobežníka polovica je: rovnoramenný? rovnostranný? pravouhelný? ostrouhelný? tupouhelný trojuhelník?

Sčítame-li u nejakého trojuhelníka všetky tri strany dovedna, obdržíme jeho obvod. Má-li na pr. niektorá zo strán 5·40 *m*, druhá 3·84 *m* a tretia 6·25 *m*, obnáša jeho obvod 15·49 *m*.

Predstavuje-li niektorá zo strán trojuhelníka jeho základnú, na ktorej si ho stáť myslíme, tenkráť predstavuje z oprotného jej uhlu na ňu (alebo na jej predĺženie) spustená kolmá jeho *výšku*. Dľa tohoto *výšku nejakého trojuhelníka vyhľadáme, jestli na základnú stranu z jej oprotného uhlu kolmú spustíme.*

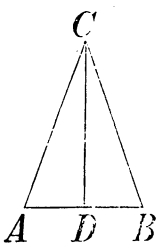


Obr. 86.

Tak na pr. je-li *AB* základná, *(Obr. 86.)* tedy je *CD* výška. U rovnoramenného trojuhelníka berieme za základnú tú, na ktorej stoja ramená, u pravouhelníka predstavuje jedna z katét základnú, druhá výšku.

Úlohy. 1. Nakresli: rovnoramenný, rovnostranný a nerovnostranný trojuhelník a vyhľadaj ich výšky.

Ako stojí v každom trojuhelníku výška na základnej?



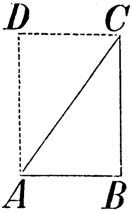
Obr. 87.

Spustíme-li u nejakého rovnoramenného trojuhelníka na pr. u $\triangle$ *ABC (Obr. 87.)* z vrcholu uhlu *C* na základnú kolmú *CD*, rozpadne sa tenže na dva trojuhelníky *ADC* a *BDC*, ktoré z papieru vyrezané a jeden na druhý položené sa cele kryjú. Z tohoto vyplýva, že *u rovnoramenného trojuhelníka ležia rovnakým stranám rovnaké uhly (A a B) a naopak, rovnakým uhlom rovnaké strany oproti.* Sú-li tedy dva z uhlov v nejakom trojuhelníku rovnaké, tedy sú i im oproti ležiace strany rovnaké a naopak.

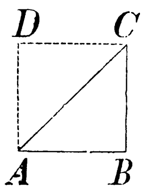
Tomuto podobné zkúsime i u rovnostranného trojuhelníka. Spustíme-li i tu z vrcholu *ktoréhokoľvek* uhlu na protiležiacu stranu kolmú i tento rozpadne sa na dva trojuhelníky, ktoré sa vzájomne kryjú. Z tohoto vyplýva, že *u rovnostranného trojuhelníka všetky* *tri uhly sú rovnaké či že rovnakým stranám ležia rovnaké uhly oproti.*

Srovnáme-li konečne u nerovnostranného trojuhelníka jednotlivé uhly a im oproti ležiace strany, najdeme, že väčšiemu uhlu leží vždy väčšia a menšiemu uhlu menšia strana oproti a naopak, o čom sa zas kružidlom a uhlomerom možno presvedčiť.

Načiarame-li k dvom katétam, akéhokoľvek pravouhelného trojuhelníka rovnobežné (*obr. 88. a 89.*). obdržíme obdľalník (alebo štvorec), ktorý má práve toľkú základnú stranu (AB) a práve toľkú výšku (BC), ako otázny trojuhelník. Obdržaný obdľalník a podobne i štvorec je, ako už známe, dvakrát toľký, ako otázny trojuhelník a tento je zas pravá polovica z otázneho obdľalníka alebo štvorca.

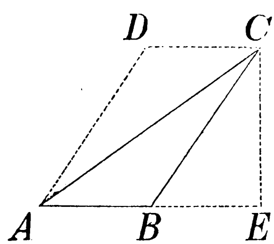


Obr. 88.

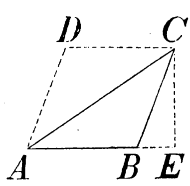


Obr. 89.

Načiarame-li podobne k dvom susedným stranám akéhokoľvek ostro- alebo tupouhelného trojuhelníka rovnobežné (*obr. 90* a *91*), obdržíme kosoďalník alebo kosoštvorec, z ktorých každý má tiež práve toľkú základnú stranu (AB) a práve toľkú výšku (CE), ako otázny trojuhelník, ktorý sme do rovnobežníka docelili. Obdržaný kosoďalník alebo kosoštvorec je, ako už známe, dvakrát toľký ako otázny trojuhelník a tento je zas pravá polovica z otázneho kosoďalníka alebo kosoštvorca. Z tohoto vyplýva, že *každý trojuhelník dá sa do rovnobežníka doceliť*, následkom čoho každý rovnobežník možno za dvojnásobok nejakého trojuhelníka považovať; potom, že *každý trojuhelník* je pravá *polovica takého rovnobežníka, ktorý má s ním rovnú základnú stranu* a rovnakú výšku.



Obr. 90.



Obr. 91.

Úlohy. 1. Nakresli: rovnostranný! rovnoramenný a pravouhelný! nerovnostranný a pravouhelný! nerovnostranný a tupouhelný! trojuhelník a doceľ každý jeden do rovnobežníka!

Ktorý rovnobežník obdržíš: v prvom? v druhom? atď. prípade? *Koľkokrát* väčší je každý z týchto rovnobežníkov než jemu zodpovedajúci trojuhelník, ktorý sme docelili? *Ktorého* trojuhelníka dvojnásobok je: štvorec? kosoštvorec? obdľalník? a kosoďalník?

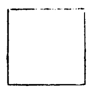
2. Oprobuj, či nakreslené trojuhelníky a ich docelením povstalé rovnobežníky majú rovnakú základnú stranu a výšku?

Poneváč v každom trojuhelníku, ktorý povstal poltením nejakého rovnobežníka priečnicou, všetky tri uhly maly 180°, a poneváč každý trojuhelník možno do rovnobežníka docelit, preto *vôbec každého trojuhelníka, všetky tri uhly majú dovedna* 180°.

Otázky. 1. *Koľko* pravých uhlov môže mať jeden a ten istý trojuhelník? a koľko tupých? 2. *Koľko* stupňov majú oba ostré uhly u pravouhelného trojuhelníka? 3. Jestli jeden z ostrých uhlov u pravouhelného trojuhelníka má 35°, *koľký* je jeho druhý ostrý uhol? (90°—35°). 4. Keďže všetky tri uhly u rovnostranného trojuhelníka sú rovnaké, koľko obnáša každý jeden? (60°). 5. Jestli u nejakého rovnoramenného trojuhelníka základnej strane oproti ležiaci uhol má 40°, koľko majú ostatné dva? koľko každý jeden? 6. Jestli dva uhly u nejakého trojuhelníka majú: 45° a 72° koľko stupňov má tretí uhol? Odp. 180° — (45° + 72°). = 63°.

§ 22. O plochových či štvorcových mierach alebo plochomierach.

Vymeriavanie plôch (rozlôh) deje sa takzvanými plochovými či štvorcovými (rozlohovými) mierami. Základná plochomiera je takzvaný *štvorcový meter* t. j. štvorec, ktorého strany sú 1 meter dlhé. Druhá od tejto menšia miera je takzvaný *štvorcový decimeter* t. j. štvorec, ktorého strany majú po 1 decimetri. Ešte menšia plochová miera je takzvaný *štvorcový centimeter* t. j. štvorec, so stranami 1 cmeter veľkými *(Obr. 92.)*. Najmenšia plochová alebo štvorcová miera, je konečne *štvorcový millimeter* t. j. štvorec ktorého každá strana je 1 mmeter dlhá. Všetky tu označené miery, sú plochy istej veľkosti a podoby. K vymeriavaniu veľkých plôch, ako na pr. k vymeriavaniu stolíc, krajín a čiastok sveta, slúži takzvaný *štvorcový kilometer* či plocha, uzavretá štvorcom, ktorého každá strana je 1000 *m* či 1 kilometer dlhá.



Obr. 92.

Najväčšia plochová alebo štvorcová miera je takzvaný *štvorcový myriameter* t. j. plocha uzavretá štvorcom, so stranami 10·000 *m* dlhými.

Znak štvorcového metra je: m^2; štvorcového decimetra: dm^2; štvorcového centimetra: cm^2; štvorcového millimetra: mm^2; štvorcového kilometra: km^2; štvorcového myriametra: Mm^2.

100 m^2-ov menujeme *ár*-om (a,) 10,000 m^2-ov, *hektarom* (ha) a 1000000 m^2-ov *myriarom* (ma).

Dľa tohoto 1 hektar má 100 ár-ov, 1 myriar 100 hektar-ov či 10000 ár-ov.

Rozdelíme-li štvorcový meter t. j. jeho plochu pozdlž a priekom na 10 rovných čiastok, obdržíme 100 štvorcových *dm*-ov, či 100 dm^2.

Z tohoto vyplýva, že:

1 m^2 má 100 dm^2-ov; 2 m^2 dvakrát 100, či 200 dm^2-ov atď. a naopak, že 100 dm^2-ov je 1 m^2; 200 dm^2-ov sú 2 m^2 atď.

Ďalej, že:

$^1/_{10}$ či 0.1 m^2-tra je 10 dm^2-ov; $^2/_{10}$ či 0.2 m^2-tra je 20 dm^2-ov atď.

$^1/_{100}$ či 0.01 m^2-tra je 1 dm^2-er; $^2/_{100}$ či 0.02 m^2-tra sú 2 dm^2-tre a t. ď.

A naopak, že:

10 dm^2 je $^1/_{10}$ či 0.1 m^2-tra; 20 dm^2-ov sú $^2/_{10}$ či 0.2 m^2-tra a t. ď.

1 dm^2 je $^1/_{100}$ či 0.01 m^2-tra; 2 dm^2-tre sú $^2/_{100}$ či 0.02 m^2-tra a t. ď.

Podobne možno i štvorcové decimetre na cm^2-tre, a cm^2-tre na mm^2-tre rozdeliť.

Úlohy 1. Nakresli štvorcový decimeter a rozdeľ ho pozdĺž i priekom, na 10 rovných čiastok!

Koľko cm^2-ov má 1 dm^2-ter? (Odpov. 100) a 2 dm^2-tre? a 3 dm^2-tre. — *Koľká* časť z 1 dm^2-tra je 1 cm^2-er? (Odp. 100-tá) a 2 cm^2-re? a t. ď. *Koľko* cm^2-ov pripadne na $^1/_{10}$ či 0.1 dm^2-tra? a na $^2/_{10}$ či 0·2 dm^2-tra? atď. *Koľkokrát* menší je 1 cm^2 nežli 1 dm^2-er? *Koľko* dm^2-ov je 1 cm^2-ter? (Odp. 0.01 dm^2) a 2 cm^2--tre? (Odp. 0.02 dm^2). Čo je za rozdiel medzi *dm*-rom? a dm^2-om? (Ten prvý je dĺžka, tento posledný je plocha.)

2. Nakresli štvorcový centimeter a rozdeľ ho pozdĺž i priekom na 10 rovných čiastok!

Ako menujeme obdržané podčiastky štvorcového centimetra? (Odp. mm^2). *Koľko* z týchto podčiastok má 1 cm^2-ter? (Odp. 100) a 2 cm^2-tre? *Koľko* mm^2-ov pripadne na $^1/_{10}$? (Odp. 10) a na $^2/_{10}$ cm^2-tra? na $^1/_{100}$ a na $^2/_{100}$ cm^2-tra? *Koľko* cm^2-ov je 1 mm^2-ter? (Odp. 0.01 cm^2) a 2 mm^2-tre? — *Koľkokrát* je väčší 1 cm^2 nežli 1 mm^2-ter?

3. Rozdeľ v mysli pozdĺž i priekom na 10 rovných čiastok 1 km^2-ter!

Koľko m^2 pripadne na 1 km^2-ter? na $^1/_{10}$ km^2-tra? na $^1/_{100}$ km^2-tra? na $^1/_{1000}$ km^2-tra atď. na $^1/_{1{,}000000}$ km^2-tra? (1 m^2).

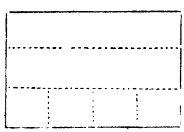
Otazky. *Koľký* obvod má 1 m^2-ter? (Odp. 4 *m*) a 1 dm^2-ter? a 1 cm^2-ter? a 1 mm^2-ter? a 1 km^2-ter? (4000 *m*).

§ 23. O vymeriavaní štvorcového obsahu štvor- a trojuhelníkov.

a) *Štvorcový obsah obďalníka a štvorca.*

K vyhľadaniu štvorcového obsahu nejakého obďalníka najprirodzenejšie by bolo, skutočnú štvorcovú mieru na pr. m^2 alebo dm^2 alebo cm^2 už či papierový a či drevený upotrebiť. Koľkokrát by sme otáznu štvorcovú mieru po jeho ploche jedno za druhým položili, toľko by mal otázny obďalník m^2-ov, alebo dm^2-ov alebo cm^2-ov. Tento spôsob vymeriavania štvorcového obsahu, bol by však veľmi obtížny, zdĺhavý a často i nemožný. O mnoho praktičnejšie je nasledujúce pokračovanie.

Má-li základná strana nejakého obďalníka na pr. 4 *cm* (*Obr 93.*), vtedy možno na ňu 4 štvorcové centimentre, jeden k druhému (v mysli) postaviť. A má-li jeho výšku 3 *cm*, vtedy takéto riadky po 4 cm^2-tre sú v ňom tri možné. Následkom čoho musí jeho štvorcový obsah, 3×4 cm^2 či 12 cm^2-ov obnášať.



Obr. 93.

Podobne, má-li základná strana nejakého obďalníka 8 *m*, tedy možno pozdĺž nej, 8 m^2-ov jedno k druhému postaviť. A má-li jeho výška 20 *m*, tedy takýchto riadkov po 8 m^2-ov, možných je v ňom 20, následkom čoho obnáša jeho štvorcový obsah 20×8 m^2 či 160 m^2.

Z oboch tu udaných príkladov vysvitá, že *štvorcový obsah nejakého obďalníka* i bez prikladania štvorcovej miery n a j d e m e; jestli najprv jeho základnú stranu alebo v celých *m*-och, alebo v celých *dm*-och alebo v celých *cm*-och vymeriame, a pozdĺž nej toľko štvorcových metrov alebo dm^2-ov alebo cm^2-ov v mysli jedno **k** druhému postavíme, toľko táže celých metrov, poťažne celých *dm*-ov alebo celých *cm*-ov v sebe obsahuje: ďalej

jestli tou istou mierou dĺžky, ktorú sme základnú stranu vymerali, i jeho výšku vymeriame a obdržaným číslom, ako nemenovaným, počet všetkých, na základnej strane postavených štvorcov, násobíme.

Hlavná vec pri tomto spôsobe merania je ako základnú stranu tak i výšku, vždy rovnomennými urobiť, t. j. oba rozmery alebo v celých metroch, alebo v celých *dm*-och alebo v celých *cm*-och vysloviť.

Ešte kratší spôsob vyhľadávania štvorcového obsahu, zakladá sa na nasledujúcej úvahe.

Prvý z horudaných obďalníkov, ako sme udali, má 4 *cm* veľkú základnú stranu a 3 *cm* veľkú výšku. Násobíme-li tieto dva rozmery obďalníka, ako nemenované čísla jeden s druhým a vyslovíme-li obdržaný násobok 3 × 4 či 12 v štvorcových centimetroch, obdržíme tiež jeho, hor udaný, štvorcový obsah či 12 cm^2-ov.

Podobne i druhý obdĺžnik, má 8 *m* veľkú základnú stranu a 20 *m* veľkú výšku. Násobíme-li i u tohoto rozmery základnej strany a výšky jedno s druhým ako nemenované čísla, a vyslovíme-li obdržaný násobok 20 × 8 či 160 v štvorcových metroch, obdržíme tiež jeho hor vypočítaný štvorcový obsah či 160 m^2.

Z oboch týchto posledných príkladov vysvitá, že *štvorcový obsah nejakého obdĺžnika najdeme, jestli jeho základnú stranu a výšku, jednoho a toho istého pomenovania mierou dĺžky, vymeriame a tieto dva rozmery jeden s druhým ako nemenované čísla násobíme, obdržaný ale násobok v tej štvorcovej miere vyslovíme, ktorá otáznemu pomenovaniu zodpovedá.*

Podobne možno i štvorcový obsah štvorca vyhľadať. Poneváč ale u štvorca je základná strana toľká, ako výška a naopak, preto štvorcový obsah štvorca i tak najdeme, jestli základnú stranu alebo výšku jednoho a toho istého pomenovania mierou dĺžky vymeriame a toto, rozmer základnej strany alebo výšky udávajúce číslo, samým sebou, ako nemenované násobíme a obdržaný násobok, ako u obdĺžnika, v tej štvorcovej miere vyslovíme, ktorá otáznemu pomenovaniu zodpovedá. Tak na pr. štvorcový obsah 8 *cm* širokého štvorca, je 8 × 8 či 64 cm^2-ov, a štvorcový obsah 9 *m* dlhého štvorca, je 9 × 9 či 81 m^2-ov.

b) *Štvorcový obsah kosoštvorca a kosodĺžnika.*

Kosoštvorec alebo kosodĺžnik možno na obdĺžnik, ktorý má s ním rovnú základnú a rovnú výšku a preto i rovný štvorcový obsah premeniť. (Viď *Obr. 72.* a *75.*). A preto, *štvorcový obsah kosoštvorca alebo kosodĺžnika vyhľadáme, jestli ich základnú stranu a výšku rovného pomenovania mierou dĺžky vymeriame a oba tieto rozmery t. j. im zodpovedajúce, čísla ako nemenované jedno s druhým násobíme a obdržaný násobok* v tej štvorcovej miere vyslovíme, ktorá otáznemu pomenovaniu zodpovedá.

Tak na pr. 7 *m* veľkú základnú stranu a 8 *m* veľkú výšku majúceho kosodĺžnika štvorcový obsah učiní 7 × 8 či 56 m^2.

Je-li základná strana a výška v mierach dĺžky nerovného pomenovania známa, musíme prv, oba tieto rozmery rovno pomenovanými urobiť, t. j. oba alebo v metroch, alebo v *dm*-och alebo v *cm*-och vysloviť a len potom násobiť. Má-li na pr. nejakého rovnobežníka základná strana 2 *m* 4 *cm* a výška 2 *dm*, obnáša jeho štvorcový obsah: alebo 2·04 × 0·2 či 0·408 m^2-ov alebo 204 × 20 či 4080 cm^2-ov alebo 20·4 × 2 či 40·8 dm^2-ov.

Zo všetkého o vyhľadávaní štvorcového obsahu tu povedaného vyplýva, že *akéhokoľvek rovnobežníka štvorcový obsah najdeme, jestli základnú stranu výškou alebo naopak, výšku základnou stranou násobíme.*

Štvorcový obsah rovnobežníka = zákl. str. $\times$ *výškou*
či nakrátce $š = z \times v$.

Poneváč štvorcový obsah nejakého rovnobežníka je násobok zo základnej strany a výšky, preto
delíme-li štvorcový obsah zákl. stranou, obdržíme výšku a delíme-li štvorcový obsah výškou, obdržíme základnú stranu
či nakrátce $š : z = v$ a $š : v = z$.

Pravda že, ako základná strana, tak i výška, ktorými delíme, musejú v mierach dĺžky príbuzného pomenovania k štvorcovému obsahu byť vyslovené, bo m^2-re len m-mi, dm^2-re len dm-mi, cm^2-tre len cm-trami možno deliť. Tak na pr. 8 m^2 veľkého a 40 cm vysokého rovnobežníka základná strana má 8 : 0·40 = 20 m alebo 80000 : 40 = 2000 cm alebo 800 : 4 = 200 dm, čo je všetko jedno.

c) *Štvorcový obsah trojuhelníkov.*

Ako známe, nejaký trojuhelník je pravá polovica takého rovnobežníka, ktorý má s ním rovnú základnú stranu a rovnú výšku. A preto, štvorcový obsah nejakého trojuhelníka najdeme, jestli, cele tak ako u rovnobežníkov, *základnú stranu a výšku jednu s druhou násobíme a z tohoto*, v štvorcových mierach vysloveného, *násobku, polovicu vezmeme*. Dľa tohoto:

$$\text{Štvor. obsah trojuhelníka} = \frac{\text{zákl. str.} \times \text{výškou}}{2} \text{ či } \frac{z \times v}{2}$$

Tak na pr. má-li nejaký trojuhelník 8 cm-ov veľkú základnú stranu a 5 cm veľkú výšku, má jeho štvorcový obsah 5 $\times$ 8 : 2 či 40 : 2 = 20 cm^2-ov.

Tento istý štvorcový obsah otázneho trojuhelníka ešte i tak najdeme, jestli *celú základnú stranu polovicou výšky alebo celú výšku, polovicou základnej strany násobíme.*

$$\text{Štvor. obsah trojuhelníka} = z \times \frac{v}{2} \text{ alebo } v \times \frac{z}{2}$$

Známe-li nejakého trojuhelníka štvorcový obsah a výšku, tenkráť jeho základnú stranu najdeme:
jestli dvojnásobok zo štvorcového obsahu výškou delíme
či nakrátce $z = 2\,š : v$.

A podobne, známe-li štvorcový obsah a základnú stranu, tenkráť jeho výšku najdeme:
jestli dvojnásobok zo štvorcov. obsahu zákl. stranou delíme,
či nakrátce: $v = 2\,š : z$.

Tak na pr. má-li štvorcový obsah nejakého trojuhelníka 84 cm^2-ov a výška 21 cm, má jeho zákl. strana 168 : 21 = 8 cm. Alebo, má-li štvorcový obsah 40 m^2 a zákl. strana 2 m 8 cm, má jeho výška 80 : 2·08 = 38·4 cm.

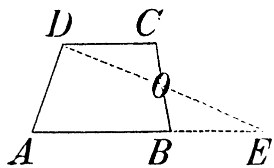
d) *Štvorcový obsah lichobežníka.*

Lichobežník, ako už známe, rovná sa čo do veľkosti rovnobežníku, ktorý má s ním rovnú výšku a toľkú základnú stranu, koľká je stredná dĺžka lichobežníka. (Viď *Obr. 79.*).

Preto štvorcový obsah lichobežníka vyhľadáme, jestli *jeho strednú dĺžku, výškou násobíme, a tento násobok*, ako u rovnobežníkov, *v štvorcových mierach vyslovíme.*

Rozdelíme-li jednu z nerovných strán lichobežníka na pr. BC na dve rovné časti BO a CO a spojíme-li bod D s O prímkou, ktorú až dotiaľ predĺžime, kým predĺženú základnú AB nereže, obdržíme trojuhelník AED (*Obr. 94.*).

Tento posledný rovná sa lichobežníku $ABCD$, bo $\triangle$ DOC je toľký, ako $\triangle$ BOE, o čom sa snadno presvedčíme, jestli ich z papieru vyrežeme a rovnakými uhlami jeden na druhý položíme.



Obr 94.

Trojuhelník ADE má toľkú výšku ako lichobežník $ABCD$ a ponevác strana $DC = BE$, preto je jeho základná strana AE toľká, ako súčet z rovnobežných strán či $AB + DC$.

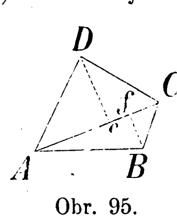
Z tohoto vyplýva, *že lichobežník možno na trojuhelník premeniť*, ktorý má s ním rovnakú výšku a ktorého základná strana je toľká, ako súčet z rovnobežných strán lichobežníka; keďže ale lichobežník rovná sa takémuto trojuhelníku preto *štvorcový obsah lichobežníka i tak najdeme, jestli súčet jeho rovnobežných strán výškou násobíme a z tohoto násobku polovicu vezmeme.*

Má-li stredná dĺžka nejakého lichobežníka na pr. 24 *cm* a výška 20 *cm*, je jeho štvorcový obsah 24×20 či 480 cm^2-ov.

Alebo, obnášajú-li dĺžky rovnobežných strán lichobežníka 25 *cm* a 13 *cm* a výška 14 *cm*, je jeho štvorcový obsah $\frac{(25 + 13)}{2} \times 14$ alebo $38 \times 7 = 266$ cm^2-ov.

e) *Štvorcový obsah rôznobežníka.*

Rôznobežníka či nerovnobežníka (trapezoida) štvorcový obsah, vyhľadáme, jestli ho priečnicou na dva trojuhelníky rozdelíme a týchto štvorcové obsahy dovedna sčítame. (*Obr. 95.*). Tak na pr. rôznobežník $ABCD$ rozložíme na $\triangle$ ABC a $\triangle$ ACD. AC je ich spoločná základná strana a De a Bf sú ich výšky.



Obr. 95.

Vymeriavame-li len plodonosnú plochu nejakej vo vršku ležiacej role alebo lúky rovnobežníkovej alebo lichobežníkovej podoby, vtedy miesto skutočnej šírky alebo dĺžky vezmemę len ich prômety, (Viď § 5.).

Úlohy k vypočítaniu. 1. Nejakého štvorca jedna strana má: *a)* 5 *m*, *b)* 4 *m*, 30 *cm*, *c)* 2 *m* 20 *cm*; koľký je jeho štvorcový obsah? Odp. *a)* 25 m^2, *b)* 18·49 m^2, *c)* 4·84 m^2, alebo 484 dm^2,

2. Nakresli zmenšeno, dľa pomeru 100 : 1 štvorec, ktorého jedna strana je 2 *m* 4 *dm* dlhá, a vypočítaj jeho štvor. obsah! Odp. 5·76 m^2.

3. V nejakej 50 *m* a 6 *dm* dlhej a práve tak širokej zahrade ťahá sa vnútri vôkol plota do kola 1 *m* široká cesta; koľký je jej štvorcový obsah? Odp. 198·40 m^2.

4. Nakresli jedno po druhom 10 štvorcov, ichžto strany majú po: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 *cm*-ov a rozdeľ každý jeden na štvorcové *cm*-tre. Koľko štvor. *cm*-ov obsahuje: prvý? druhý? atď. desiaty z otáznych štorcov?

Odp.: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 cm^2.

Poneváč každému jednemu z posledných čísel zodpovedá jeden štvorec, preto tieto čísla menujeme *štvorcovými* či *kvadrátnymi* číslami.

Ako vidíme, tiež tak povstaly, že sme čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 jedno každé samosebou násobili. Násobíme-li tedy nejaké číslo samým sebou, obdržíme, jemu zodpovedajúce štvorcové či kvadrátne číslo.

Tak na pr. kvadrátne číslo, čísla 1 je 1, bo 1 $\times$ 1 je 1; kvadrátne číslo čísla 2 sú 4, bo 2 $\times$ 2 sú 4; kvadrátne číslo, čísla 3 je 9, bo 3 $\times$ 3 je 9 atď.

A naopak, kvadrátnych čísel:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 takzvané *kvadrátne* či *štvorcové korene*

sú čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, z ktorých ony povstaly.

Tak na pr. kvadrátny koreň čísla 1 je 1; kvadrátny koreň čísla 4 sú 2; kvadrátny koreň čísla 9 sú 3; kvadrátny koreň čísla 16 sú 4 atď.

Kvadrátny koreň nejakého kvadrátneho čísla obdržíme, jestli toto posledné na dva rovnaké činitele rozložíme a jedneho z nich vezmeme. Tak na pr. kvadrátny koreň čísla 1 či 1 $\times$ 1 je 1, kvadrátny koreň čísla 4 či 2 $\times$ 2 sú 2; kvadrátny koreň čísla 9 či 3 $\times$ 3 sú 3; kvadrátny koreň čísla 16 či 4 $\times$ 4 sú 4 atď.

Mathematici označujú kvadrátne čísla:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

takto: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2. t. j. na miesto 1 či 1 $\times$ 1 píšu 1^2 (čítaj, 1 na druhej mocnine); miesto 4 či 2 $\times$ 2 píšu 2^2; miesto 9 či 3 $\times$ 3 píšu 3^2 atď.

A štvorcové či kvadrátne korene, čísel:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. 64, 81, 100 označuje zas takto: $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$.

Poneváč kvadrátny koreň čísla 1 je 1, preto $\sqrt{1}$ znamená 1; $\sqrt{1} = 1$; ďalej, poneváč, kvadrátny koreň čísla 4 sú 2, preto $\sqrt{4}$ znamená 2; $\sqrt{4} = 2$; poneváč kvadrátny koreň čísla 9 sú 3, preto $\sqrt{9}$ znamená 3; $\sqrt{9} = 3$ atď.

Zo všetkého o kvadrátnych číslach a kvadrátnych koreňoch povedaného vyplýva; že *kvadrátne číslo udáva štvorcový či kvadrátny obsah, a kvadrátny koreň tohože čísla zas stranu nejakého štvorca.*

Štvorcové obsahy štvorcov sú kvadrátne čísla a strany štvorcov sú kvadrátne korene týchto čísel. A preto *štvorcový obsah nejakého štvorca najdeme, jestli jeho strane zodpovedajúce kvadrátne číslo vyhľadáme, a stranu nejakého štvorca obdržíme, jestli zo štvorcového obsahu,* t. j. *tomuto zodpovedajúceho kvadrátneho čísla, kvadrátny koreň vydobýme.*

5. Nejakého štvorca štvorcový obsah má 49 m^2; koľká je jedna z jeho strán?

Rozl. Stranu štvorca najdeme, jestli zo štvorcového obsahu t. j. zo zodpovedajúceho mu čísla kvadrátny koreň vyhľadáme. Poneváč, kvadrátny koreň čísla 49 či $\sqrt{49}$ je 7, preto otázneho štvorca strana je 7 m dlhá.

Poznámka. Jestli štvorcový obsah štvorca predstavujúce číslo nenie kvadrátne, v tom prípade možno kvadrátny koreň len priblíženo vyhľadať. Poneváč ako sme riekli, kvadrátny koreň nejakého čísla najdeme, jestli ho na dva rovnaké činitele rozložíme, preto kvadrátny koreň na pr. čísla 40 či $\sqrt{40}$ vyhľadáme, jestli 40 na dva rovnaké činitele rozložime. Číslo 40 ale nenie kvadrátne číslo. Povážime-li ale, že 6×6 je 36 a 7×7 je už 49, napadne nám, že jeho kvadrátny koreň, leží medzi 6 a 7, že je väčší než 6 a menší než 7 či že je 6 a ešte voľačo. Násobíme-li na pr. $6{\cdot}2 \times 6{\cdot}2$ obdržíme 38·44; násobíme-li $6{\cdot}3 \times 6{\cdot}3$ obdržíme 39·69; násobíme-li $6{\cdot}32 \times 6{\cdot}32$ obdržíme 39·94 takmer 40 a násobíme-li $6{\cdot}33 \times 6{\cdot}33$ obdržíme už 40·06. $\sqrt{40}$ je tedy istotne 6·32. Takto či *probovaním* možno i druhých menovite menších nekvadrátnych čísel priblíženo kvadrátny koreň vypočítať. (Viď tabulku kvadrátnych koreňov na konci knihy).

6. Jestli obvod nejakého štvorca má 21 m a 2 dm; koľký je jeho štvorcový obsah či jeho rozloha? Odp 28 m^2 a 9 dm^2.

7. Nejakého obdĺžnika základná strana má 8 m a výška 14 m; koľký je jeho štvorcový obsah? Odp. 112 m^2!

8. Nejaká vo vršku ležiaca roľa obdĺžnikovej podoby je 5 m široká a 38 m dlhá; koľká je jej skutočná či pravá a koľká jej plodonosná plocha, jestli pravouhlý prômet jej dĺžky má 30 m?

Odp. Skutočná plocha $= 5 \times 38$ *m* a plodonosná $= 5 \times 30$ *m*. (Viď § 5.).

Plodonosná plocha otáznej role je toľká, ako jej pravouhlý prômet, ktorýžto posledný obdržíme jestli si ju v mysli od hora na dol kolmo osvetlenou byť myslíme. Týmto spôsobom obdržaný tieň či stín je jej plodonosná plocha, Postav na stôl knižku kosmo a osvetli ju od hora na dol kolmo, obdržíš jej pravouhlý prômet.

9. Vymeraj šírku, dlžku a výšku školskej alebo inej izby a vypočítaj štvorcový obsah každej steny, povale a podlahy (Vrátajúc v to i dvere a obloky, alebo odrátajúc z toho dvere a obloky.).

10. Vypočítaj rozlohu či štvorcový obsah 1.60 *m* dlhého a 1.20 *m* širokého stola! (Odp. 1.92 m^2.)

11. Nejaké zrkadlo i s rámom je 72 *cm* široké a 94 *cm* vysoké; koľký je štvorcový obsah sklenej zrkadlovej tably, jestli šírka rámu 6 *cm* obnáša? (Odp. 4920 cm^2.)

12. Niekto kúpil 32 *m* 40 *cm* široký a 18 *m* 20 *cm* dlhý grunt pod dom, obďalníkovej podoby; koľko platil zaň, jestli každý 1 m^2 stál 6 zl. 50 kr.? Odp. 3832.92 zl.

13. Niekto zamenil svoju 745 m^2 20 dm^2 veľkú zahradu obďalníkovej podoby za druhú tejže podoby, ktorá je 16 *m* 20 *cm* široká; koľko dlhá je táto posledná zahrada? Odp. 46 *m*.

14. Koľko 2 *m* 60 *cm* dlhých a 28 *cm* širokých dosák potrebujeme k vyloženiu 5 *m* 20 *cm* dlhej a 3 *m* 50 *cm* širokej dvorany? (Odp. Niečo vyše 25) Štvorcový obsah dvorany delíme štvorcovým obsahom jednej dosky.

15. Koľko kamenných dlážok 30 *cm* širokých a práve toľko dlhých treba je k vyloženiu istého 18 *m* širokého a 20 *m* dlhého dvora? (Odp. 4000 kusov.) A koľko bude stáť celá dlažba, jestli každý 1 m^2 stojí 7 zl.? Odp. 2520 zl.

16. Nejaká zahrada, kosoštvorcovej podoby má 64 *m* 20 *cm* dlhú základnú stranu a 46 *m* 40 *cm* veľkú výšku; koľký je jej štvorcový obsah? a ešte koľko zvýši z jej obsahu, jestli rovnobežne so základnou stranou 14 *m* vysoký kus z nej odrežeme? Odp. Štvorcový obsah učiní 2978.88 m^2 a zvyšok 2080.08 m^2-ov.

17. U nejakého pravouhelného trojuhelníka majú katéty či pravý uhol uzavierajúce strany: 28 *m* 40 *cm* a 19 *m* 60 *cm*; koľký je jeho štvorcový obsah? 278,32 m^2-ov.

18. Koľko štvorcových metrov zaujíma istá roľa trojuhelníkovej podoby, jestli jej základná strana má 106 *m* a výška 70.40 m^2. Odp. 3731.20 m^2-ov.

19. Krov nejakej väže pozostáva so štyroch rovnoramenných trojuhelníkov. Jestliže základná strana každého jednoho trojuhelníka má 1 *m* 40 *cm*. a výška 2 *m* 60 *cm*, koľko m^2 blachy treba k jej pokrytiu? Odp. $4 \times 1{,}82$ m^2 či 7.28 m^2-ov.

20. Jestliže štvorcový obsah nejakého trojuhelníka má 20 m^2 a 67 dm^2 a základná strana 5.30 *m*; koľká je jeho výška? Odp. 78 *m*.

21. Nejaká priekopa je pri spodku 1.20 *m* a pri vrchu 80 *cm* široká a 60 cm. vysoká; koľko m^2 obnáša jej koľmý prierez či jej kolmá priesečná plocha? Odp. $(1.20 + 0.80) \times 0{,}30$ či 0.60 m^2. Alebo, poneváč jej stredná dĺžka obnáša $\frac{1.20 + 080}{2}$ *m*, tedy je jej štvorcový obsah 1×0.60 či 0.60 m^2.

22. Nejaký hrýnok, lichobežníkovej podoby, má 170 *m* 50 *cm* a 145 *m* 40 *cm* dlhé rovnobežné strany, ktorých vzájomná dialka obnáša 26 *m* 40 *cm*; koľký je jeho štvorcový obsah? Odpoveď 4169.88 m^2.

23. Nejaká roľa má podobu rôznobežníka, jehožto priečnica je 70.80 *m* dlhá a od oboch jej oprotných uhlov 25.40 *m* a 30.60 *m* vzdialená; koľký je jej štvor. obsah?

R o z. Vypočítaj každého trojuhelníka štvorcový obsah o sebe a sčítaj dovedna. Prvý trojuhelník je 70.80×12.70 *m* či 899.16 m^2 a druhý 70.80×15.3 či 1083.24 m^2 veľký.

P o z n á m k a. Meričia vyhľadávajú štvorcový obsah trojuhelníkov dľa nasledujúcej formulky:

$$\text{Štv. obs. trojuhelníka} = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$$

Litera s znamená polovicu, zo všetkých troch strán t. j. ich polovičný súčet, a značí jednu. b druhú a c tretiu stranu trojuhelníka.

Tak na pr. má-li prvá strana trojuhelníka $a = 5$ *m*, druhá $b = 4$ *m* a tretia $c = 3$ *m*, tedy je $s = \frac{5 + 4 + 3}{2}$ či 6, $(s-a) = 5$, $(s-b) = 4$, $s-c = 3$.

$$\text{Štv. obs.} = \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = \sqrt{36} = 6\ m^2.$$

Dľa tohoto, štvorcový obsah nejakého trojuhelníka najdeme:

a) jestli jeho všetky tri strany v rovnopomenovaných mierach dĺžky vymeriame a dovedna sčítame:

b) jestli zo súčtu všetkých troch strán polovicu vezmeme; (s)

c) jestli z polovičného súčtu prvú stranu; $(s-a)$

d) jestli z polovičného súčtu druhú stranu; $(s-b)$

e) jestli z polovičného súčtu tretiu stranu, odčítame $(s-c)$

f) jestli týmto spôsobom obdržíme štyri čísla t. j. s, $s-a$, $s-b$, $s-c$, jedno s druhým násobíme;

g) jestli z obdržaného násobku kvadrátny koreň vyhľadáme. (Viď úlohu 5.)

Upotrebením tejto formulky možno štvorcový obsah akéhokoľvek štvoruhelníka vypočítať, bo každý štvoruhelníka dá sa priečnicou na dva trojuhelníky rozdeliť, jichžto štvorcové obsahy dovedna sčítané, dajú štvorcový obsah otázneho štvorca.

§ 24. O pravidelných mnohouhelníkoch.

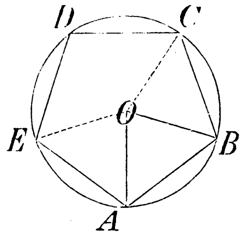
Primočiarne roviny (alebo obrazce) ohraničené viac než štyrma strany, menujeme vôbec *mnohouhelníkami.* Menovite, piatima stranami ohraničený, menujeme *päťuhelníkom*, šiestima stranami ohraničený, *šestiuhelníkom*, a t. ď.

Mnohouhelníky delíme na *pravidelné* a na *nepravidelné.*

Pravidelnými mnohouhelníkami menujeme takové, u ktorých ako strany tak i uhly sú rovnaké.

a) *Sostrojovanie pravidelných mnohouhelníkov.*

Pravidelné mnohouhelníky sostrojujeme pomocou kruhu. Najjednoduchejší sostrojovací spôsob je nasledujúci, takzvaný mechaničný. Máme-li nejaký pravidelný mnohouhelník na pr. pravidelný päťuhelník sostrojiť, nakreslíme kruh, rozdelíme celú kružnicu na päť rovnakých oblukov: AB, BC, CD, DE a EA a spojíme *(Obr. 96.)* ich deliace body: A, B, C, D, E, prímkami dovedna. Chceme-li však toto previesť, musíme prv veľkosť otáznych oblukov v stupňoch vyhľadať a z kružnice jeden po druhom kružidlom výseknúť. Túto veľkosť otáznych oblukov vyhľadáme, jestli celej kružnici zodpovedajúcich 360°, počtom strán, t. j. 5-mi rozdelíme. Poneváč 5 v 360 nachodí sa 72 krát, preto má jeden z otáznych oblukov 72°. Tejto veľkosti obluk z celej kružnice ale tak vysekneme, jestli stredobod kruhu O, s nejakým jeho bodom na pr. s A spojíme a potom uhlomerom 72° veľký stredový uhol AOB vymeriame. Poneváč $\measuredangle$ AOB má 72° stupňov, preto i jemu zodpovedajúci obluk AB musí tiež toľko stupňov obnášať. A poneváč 72 v 360 päťkrát nachodí sa, preto i obluk AB, musí v celej kružnici tiež toľkokrát byť obsažený, o čom sa kružidlom možno presvedčiť.



Obr. 96.

Podobne, pravidelný šesťuhelník sostrojíme, jestli celú kružnicu nejakého kruhu, na šesť rovnakých oblukov rozdelíme a každé dva susedné deliace body, prímkami dovedna spojíme. Poneváč 6 v 360 nachodí sa 60 krát, preto pripadne na jeden obluk pravidelného šesťuhelníka 60°, ktorý na hor udaný spôsob vymeriame a z kružnice šesťkrát vysekneme.

Z tohoto vyplýva, že *nejaký pravidelný mnohouhelník sostrojíme, jestli celú kružnicu na toľko rovnakých oblukov rozdelíme, koľko otázny mnohouhelník strán v sebe osahuje a jestli potom každé dva susedné deliace body obdržaných oblukov jeden s druhým prímkami spojíme.*

Týmto spôsobom možno však len takové pravidelné mnohouhelníky sostrojiť, u ktorých jednotlivé obluky len celé stupne v sebe obsahujú.

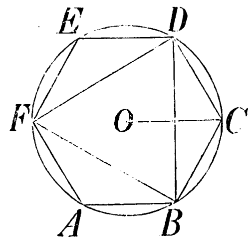
Úlohy. 1. Nakresli pravidelný štvoruhelník!

Na koľko rovnakých oblukov rozdelíme v tomto prípade celú kružnicu? *Koľko* stupňov má jeden z týchto oblukov? (Odpoveď $360^0 : 4 = 90^0$.

2. Nakresli pravidelný deväľuhelník!

Koľko stupňov má každý obluk pravidelného deväťuhelníka; (Odp. $360^0 : 9 = 40^0$).

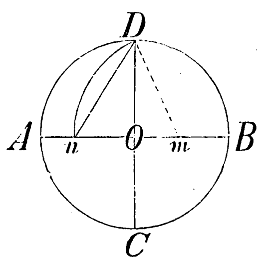
Pravidelného mnohouhelníka stranu možno i z polmeru vyhľadať. Tak na pr. odsekneme-li z kružnice nejakého kruhu otvorom kružidla jeho polmeru zodpovedajúcim, jedno po druhom šesť kusov a spojíme-li každé dva susedné deliace body jeden s druhým, obdržíme pravidelný šesťuhelník *ABCDEF* Obr. 97. Z tohoto vyplýva že *do nejakého kruhu, vpísaného pravidelného šesťuhelníka strana, je toľká ako jeho polmer.* Má-li polmer nejakého kruhu 1 *m*, tedy má i doň vpísaného pravidelného šesťuhelníka strana tiež toľko.



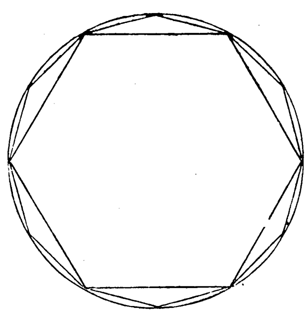
Obr. 97.

Spojíme-li v pravidelnom šesťuhelníku každý tretí uhol jeden s druhým prímkou, obdržíme pravidelný trojuhelník *BDF*. Obr. 97.

Podobne pravidelnému päťuhelníku zodpovedajúcu stranu vyhľadáme, jestli v nejakom kruhu dva priemery *AB* a *CD* (*Obr. 98.*) jeden na druhý kolmo postavíme, jestli potom polmer *OB* poltíme a poltiaci bod *m* s *D* spojíme a dialkou *Dm* z bodu *m* obluk *Dn* opíšeme. Bod *D* s bodom *n* spojujúca prímka *Dn* je strana hľadaného päťuhelníka, ktorý už teraz snadno sostrojíme, jestli na kružnici poťažného kruhu päť toľkýchto kusov jedno po druhom odsekneme a ich deliace body prímkami dovedna spojíme.



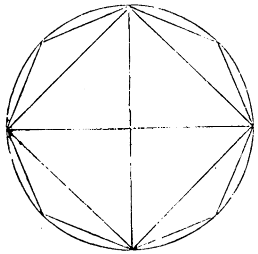
Obr. 98.


Obr. 99.

Poltíme-li v pravidelnom šesťuhelníku *ABCDEF* (*Obr. 99.*) jednotlivým stranám zodpovedajúce obluky a spojíme-li každý poltiaci bod so susednými uhlami otázne-šesťuhelníka s ich vrcholami: obdržíme pravidelný dvanásťuhelník.

Týmto spôsobom v poltení oblukov ďalej pokračujúc.. obdržíme, štyriadvadsať-, osemaštyridsaťuhelník a t. ď.

Postavíme-li v nejakom kruhu dva priemery, jeden na druhý, kolmo a spojíme-li ich konečné body prímkami, obdržíme pravidelný štvoruhelník. (*Obr. 100.*).



Obr. 100.

Poltíme-li jednotlivým stranám pravouhelného štvoruhelníka zodpovedajúce obluky a spojíme-li každý jeden poltiaci bod so susednými uhlami otázneho štvoruhelníka, s ich vrcholami, obdržíme pravidelný osemuhelník.

Pokračujeme-li v poltení oblukov ďalej, obdržíme pravouhelný šesťnásťuhelník, dvaatridsaťuhelník a t. ď.

Podobne t. j., postupným poltením jednotlivých oblukov možno z pravidelného päťuhelníka, pravidelný desaťuhelník, potom pravideldvaasaťuhelník atď. obdržať.

Z tohoto vyplýva, že *k nejakému známemu pravidelnému mnohouhelníku, druhý, dvakrát toľko strán majúci nakreslíme, jestli známeho pravidelného mnohouhelníka obluky poltíme a deliace body s vrcholy susedných uhlov, prímkami dovedna spojíme.*

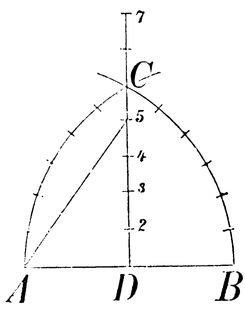
Úlohy. 1 Nakresli kruh polmerom 5 *cm* veľkým a doň pravidelný šesťuhelník!

Koľko strán majúce pravidelné mnohouhelníky obdržíme, jestli tohoto a každého v novo povstalého pravidelného mnohouhelníka obluky postupne poltíme a deliace body s vrcholy susedných uhlov prímkami spojíme?

2. Nakresli kruh polmerom 4 *cm* veľkým a doň pravideľný dvadsaťuhelník! Ako to prevedieš?

Rozl. Najprv nakreslím pravidelný päť- potom, na tohoto základe pravidelný desať-, a konečne na posledného základe pravidelný dvadsaťuhelník.

V dosiaľ udaných spôsoboch sostrojovania závisela veľkosť nejakého pravidelného mnohouhelníka, ako i veľkosť jeho strán, jedine od veľkosti kruhu, do ktorého sme ho vpísali. Alebo, dosiaľ vyhľadávali sme nejakého sostrojiť sa majúceho pravidelného mnohouhelníka stranu na základe kruhu. Pozostáva nám ešte opačná úloha t. j. vyhľadať kruh, či jemu zodpovedajúci polmer jestli je strana sostrojiť sa majúceho pravidelného mnohouhelníka známa. Je-li sostrojiť sa majúceho pravidelného mnohouhelníka strana *AB (obr. 101)*, tedy poltíme ju v D; na to otvorom kružidla dialke AB zodpovedajúcim opíšeme ako z A tak i z B obluky, ktoré sa režú v C; potom spojíme C s D a predlžime túto prímku CD i vyše bodu C; obluk AC rozdelíme na šesť rovných čiastok; *toľkéto* čiastky označíme i na prímke DC, tak, že na bod C pripadne číslo: *6*, na pod C nalezajúce sa deliace body čísla: *5*, *4*, *3*, *2* a na nad C nalezajúce sa čísla *7*, *8*, *9* atď. (Na obrázci stojí *7* chybne, o jednu čiarku vyššie.)



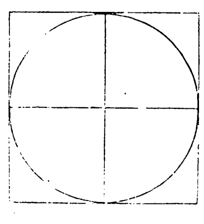
Obr. 101.

Na základe tohoto obrázca možno vyhľadať polmer kruhu, do ktorého bársjaký, toľké strany, ako je prímka AB majúci, pravidelný mnohouhelník možno vpísať alebo okolo neho opísať. Tak na pr. dialka A_5 znamená polmer takového kruhu, do ktorého strane AB zodpovedajúci pravidelný päťuhelník; dialka A_7 značí zas polmer kruhu, do ktorého strane AB zodpovedajúci pravidelný sedemuhelník možno vpísať alebo okolo neho opísať atď.

Úlohy. 1. Sostroj, týmto spôsobom, pravidelný sedemuhelník, jehož strana má 6 *cm*!

Vo všetkých dosiaľ opísaných prípadoch sme pravidelné mnohouhelníky do patričného kruhu vpísali. Pravidelné mnohouhelníky možno avšak i okolo kruhu opísať. Toto tak prevedieme, jestli najprv kružnicu na toľko rovnakých oblukov, koľko sostrojiť sa majúci mnohouhelník má strán, rozdelíme a deliace body oblukov so stredobodom kruhu spojíme a jestli potom v konečnom bode každého polmeru *tečnice* t. j. kolmé postavíme. (*Obr. 102.*).

Je-li pravidelný mnohouhelník do kruhu vpísaný, tenkrát sú jeho strany *tetivy*, je-li ale okolo kruhu opísaný, tenkrát sú jeho strany *tečnice*.

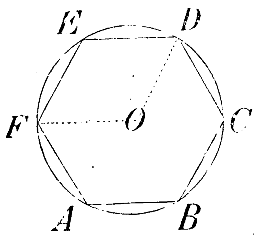

Obr. 102.

Úlohy. 1. Opíš polmerom 4 *cm* velikým kruh, a kolo neho pravidelný osemuhelník!

Ktoré pravidelné mnohouhelníky menujeme do kruhu vpísanými a ktoré kolo kruhu opísanými? — U ktorých sú jednotlivé strany tetivy? a u ktorých tečnice?

Sú-li nejakého pravidelného mnohouhelníka uhly a strany známe, tenkrát ho i *bez upotrebenia kruhu* tak sostrojíme, jestli otázne uhly a strany jedno po druhom vymeriame a nakreslíme.

Pravidelných mnohouhelníkov uhly možno nasledovne vypočítať: Poneváč n pravidelných mnohouhelníkov vrcholy uhlov v obvode kruhu nachodia sa, preto sú každého pravidelného mnohouhelníka uhly *obvodové*. Každému obvodovému uhlu ale ako známo, zodpovedá jeden stredový, na tom istom obluku stojací. Tak na pr. (*Obr. 103.*) obvodovému uhlu *FED*, ktorý stojí na obluku *FABCD*, zodpovedá stredový *FOD* tiež na tom istom obluku *FABCD* stojací. O obvodových uhloch ale známe, (§ 17.) že sú dva razy menšie, než im zodpovedajúce stredové. Známe-li tedy posledný t. j. stredový, tenkráť snadno vypočítame jemu zodpovedajúci obvodový. U tých pravidelných mnohouhelníkov, ktorých kružnica je počtom strán v celých stupňoch deliteľná, možno stredový uhol z obluku, na ktorom stojí, vypočítať. Tak na pr. stredový uhol *FOD*, v pravidelnom šesťuhelníku *ABCDEF*, (*obr. 103.*) stojí na obluku *FABCD*. Tento má ale $4 \times$ kráť 60^0 či 240^0, a práve toľko má i *FOD*, keďže ale stredový uhol *FOD* má 240^0, tak jemu zodpovedajúci obvodový *FED* má polovic toľko či 120^0. (Viď § 17.) Z tohoto vyplýva: že *pravidelného šesťuhelníka uhly majúpo* 120^0.



Obr. 103.

Podobne, v pravidelnom päťuhelníku ABCDE obr. 96 má stredový uhol *EOC* stojací na obluku EABC, 3×72^0 či 216^0, následkom čoho jemu zodpovedajúci obvodový *EDC* má polovic toľko či 108^0. Z tohoto vyplýva: že *pravidelného päťuhelníka uhly majú po* 108^0.

Úlohy. 1. Nakresli pravidelný osemuhelník!

Na koľko rovnakých oblukov rozdelíme v tomto prípade celú kružnicu? — *Koľko* stupňov má jeden z týchto oblukov? (Odp. $360^0 : 8 = 45^0$) — *Koľko* stupňov má jednomu z obvodovch uhlov zodpovedajúci stredový uhol? Odp. 6×45 či 270^0. *Koľko* stupňov má jeden obvodový uhol? Odp. $270^0 : 2 = 135^0$.

2. Nakresli bez upotrebenia kruhu pravidelný desaťuhelník!

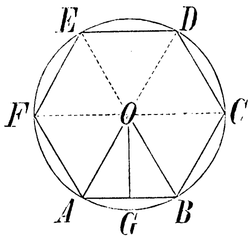
Koľko má stupňov u pravidelného desaťuhelníka jeden z oblukov? — *Koľko* stupňov má každý jeho obvodový uhol? Ako to vyhľadáš?

3. Nakresli bez upotrebenia kruhu pravidelný päťuhelník, jehož jedna strana má 6 *cm*!

Koľko stupňov majú pavidelného päťuhelníka uhly? — *Aké* sú tieto uhly? (Obvodové) — *Ako* vyhľadávame obvodové uhly? — *Ako* vyhľadávame obvodovému uhlu zodpovedajúci stredový?

b) *Vyhľadávanie obvodu a štvorcového obsahu pravidelných mnohouhelníkov a vypočítanie ich uhlov.*

S čítame-li dĺžku všetkých 6 strán u pravidelného šesťuhelníka *ABCDEF* (*obr. 104.*), obdržíme jeho obvod. A ponevač všetky strany tohoto mnohouhelníka sú rovnaké, preto jeho obvod i tak najdeme, jestli dĺžku jednej strany 6-mi násobíme. Podobne vyhľadáme obvod i ktoréhokoľvek iného pravidelného mnohouhelníka. Z tohoto vyplýva, že *obvod nejakého pravidelného mnohouhelníka najdeme, jestli dĺžku jednej jeho strany, počtom strán násobíme.*



Obr. 104.

Spojíme-li u pravidelného šesťuhelníka $ABCDEF$ (*obr. 104.*) vrcholy uhlov s jeho stredobodom, rozpadne sa tenže na 6 rovnoramenných (vlastne rovnostranných) rovnakých trojuhelníkov. Tieto trojuhelníky sú rovnaké preto, bo majú rovnakú základnú stranu a rovnakú výšku. Vyhľadáme-li štvorcový obsah jednoho z týchto trojuhelníkov na pr. trojuhelníka AOB na už známy spôsob (viď § 23.) a násobíme-li ho počtom všetkých strán či 6-mi, obdržíme štvorcový obsah celého šesťuhelníka.

Štvorcový obsah pravidelného šesťuhelníka $ABCDEF = 6 \times (AB \times {}^1/_2 OG)$ alebo $6 \times ({}^1/_2 OG \times AB)$.

Alebo, poneváč štvorcový obsah jednoho z týchto trojuhelníkov je: základná $\times \frac{výška}{2}$ či na krátce: $z \times \frac{v}{2}$ tedy dvoch je: $2 \times z \times \frac{v}{2}$ troch je: $3 \times z \times \frac{v}{2}$ atď. všetkých šiestich: $6 \times z \times \frac{v}{2}$. Poneváč ale $6 \times z$ rovná sa jeho celému obvodu, preto štvorcový obsah pravidelného šesťúhelníka $ABCDEF$ i tak najdeme: *jestli jeho celý obvod polovicou výšky OG* alebo *polobvod celou výškou OG násobíme.*

Má-li na pr. strana AB 3 *m* a 33 *cm* a výška trojuhelníka AOB či jej dialka od stredobodu O 2 *m* a 69 *cm*, tedy je jeho štvorcový obsah $= 6 \times 3{\cdot}33 \times 1{\cdot}345$ alebo $3 \times 3{\cdot}33 \times 2{\cdot}69 = 26{\cdot}8731\ m^2$.

Podobne možno štvorcový obsah i ktoréhokoľvek iného pravidelného rovnouhelníka vypočítať. Z tohoto vyplýva, že štvorcový obsah pravidelného mnohouhelníka vôbec najdeme, jestli ho, *počnúc od stredobodu, na rovnoramenné trojuhelníky rozložíme, a štvorcový obsah jedneho z týchto trojuhelníkov, počtom strán násobíme* alebo, jestli jeho polobvod, kolmou dialkou niektorej strany od stredobodu násobíme.

Úlohy. 1. Nakresli pravidelný päťuhelník, jehož jedna strana má 10 *cm* a vyhľadaj jeho štvorcový obsah!

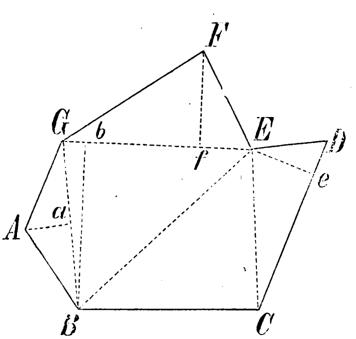
Na koľko trojuhelníkov rozpadne sa ťenže, jestli jeho vrcholy so stredobodom spojíme? *Aké* sú tieto trojuhelníky? *Ako* vyhľadáš ich výšku či kolmú dialku niektorej strany od stredobodu? (Spustím so stredobodu na niektorú stranu kolmú, vezmem túto do kružidla a premeriam na metri).

Keďže pravidelný šesťuhelník ako na pr. šesťuhelník *ABCDEF* (*obr. 104.*) na 6 rovnoramenných (vlastne rovnostranných) trojuhelníkov možno rozložiť, a keďže každého trojuhelníka všetky tri uhly majú 180°, preto všetkých týchto šesť trojuhelníkov uhly majú $6 \times 180°$ či 1080°. Odčítame-li z tejto summy okolo stredobodu *O* ležiace uhly, ktoré činia 360°, zvýši na obvodové uhly 720°. Rozdelíme-li tento počet stupňov 6-ma, obdržíme na jeden obvodový uhol pripadajúcich 120°. Z tohoto tiež vyplýva, že *uhly pravidelného šesťuhelníka majú po* 120°. Týmto spôsobom možno i ktoréhokoľvek pravidelného mnohouhelníka uhly, vypočtovať.

§ 25. O nepravidelných mnohouhelníkoch.

Nepravidelnými mnohouhelníkami, ako už známo, menujeme takové, u ktorých ani uhly ani strany nie sú rovnaké.

Obvod nepravidelného mnohouhelníka najdeme, jestli všetky jeho strany, týchto dĺžky dovedna sčítame.



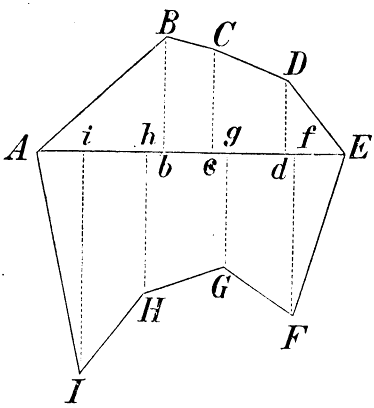
Obr. 105.

Štvorcový obsah nepravidelného mnohouhelnika ale vyhľadáme, jestli ho priečnicami na trojuhelníky rozložíme a týchto štvorcové obsahy po jednom vypočítame a dovedna sčítame. Tak na pr. štvorcový obsah mnohouhelníka *ABCDEFG* (*obr. 105.*) najdeme, jestli ho na trojuhelníky: *ABG*, *BEG*, *BCE*, *CDE*, a *EFG*, rozložíme a týchto štvorcové obsahy dovedna sčítame. Tak na pr. je-li $BG = 39$ *m*, $BE = 42{\cdot}5$ *m*, $CD = 31{\cdot}5$ *m*, $GE = 39.5$ *m*. $Aa = 11{\cdot}6$ *m*, $Cc = 19{\cdot}7$ *m*, $Ee = 12{\cdot}1$ *m*, $Bb = 35.4$ *m*, $Ff = 16{\cdot}4$ *m*, obnáša celý mnohouhelník $1858{\cdot}45$ m^2.

Štvorcový obsah nejakého nepravidelného mnohouhelníka na pr. *ABCDEFGHI obr. 106.* ešte i tak vyhľadáme, jestli jeho dva uhly na pr. ∢ *A* a ∢ *E* prímkou *AE* dovedna spojíme, a z ostatných

*) V trojuhelníku *BEC* chybí z bodu *C* na *BE* spustená kolmá *Cc*.

uhlov na túto kolmé spustíme. Následkom tohoto rozpadne sa celý mnohouhelník na trojuhelníky: AiI, AbB, DdE a EfE a potom na lichobežníky: $BCcb$, $CDdc$, $FGgf$, $GHhg$, $HIih$. — Jednotlivé odseky priečnej AE predstavujú výšky otáznych trojuhelníkov a lichobežníkov, a z uhlov na ňu spustené kolmé zas základné strany trojuhelníkov a rovnobežné strany lichobežníkov. Tak na pr. Ai je výška trojuhelníka AiI; ih je výška lichobežníka $HIih$, Ab je výška trojuhelníka AbB, hg je výška lichobežníka $HGgh$ atď.



Obr. 106.

Podobne kolmá Ii je základná strana trojuhel. AIi; kolmá bB je základná trojuhelníka AbB; kolmé Bb, a Cc sú rovnobežné strany lichobežníka $BbcC$ atď.

Je-li na pr. $Bb = 60·5\ m$, $Cc = 57·2\ m$, $Dd = 46\ m$, $Ff = 52·3\ m$, $Gg = 42·1\ m$, $Hh = 77·1\ m$, $Ii = 65·4\ m$, $Ai = 19·1\ m$, $ih = 29·2\ m$, $hb = 8·1\ m$, $bg = 31\ m$, $gc = 9·2\ m$, $cf = 55·4\ m$, $fd = 6·8\ m$, $dE = 34·8\ m$, tedy je:

$\triangle\ ABb$	$= 1706·1$;	lichobežník	$BbcC$	$= 1282·93$
$\triangle\ DdE$	$= 800·4$;	» »	$FfgG$	$= 1798·32$
$\triangle\ FfE$	$= 732·2$;	» »	$CcdD$	$= 1253·88$
$\triangle\ AiI$	$= 605·47$:	» »	$GghH$	$= 2330·36$
		lichobežník	$HhiI$	$= 1175·30$.

Celý mnohouhelník $ABCDEFGH = 11684·76\ m^2$.

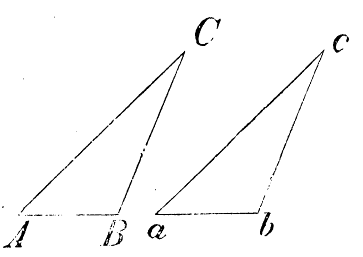
K vymeriavaniu štvorcového obsahu nepravidelných mnouhelníkov v slobodnom ľahký spôsob podáva nám na strane 93. nalezajúca sa formulka. Máme-li štvorcový obsah, nejakého, nepravidelnému mnohouhelníku podobajúceho sa poľa alebo lúky vymerať, rozdelíme otáznu plochu na samé trojuhelníky, vypočítame po jednom ich štvorcové obsahy dľa spomenutej formulky, a sčítame dovedna.

Vyhľadávanie kvadrátneho koreňa, čo priam len probovaním, nenie tak nesnadné, ako si to azdaj myslíme. Tak na pr, obdržíme-li za výsledok: $\sqrt{6072}$, tedy číslo toto snadno na dva rovnaké činitele rozložíme, keď považime. že 70×70 je 4900 a 80×80 je 6400. Pravý koreň leží medzi 70 a 80; poneváč $77 \times 77 = 5929$ a $78 \times 78 = 6084$, tedy je pravý koreň istotne 77 celých. A ponevác $77·9 \times 77·9$ je 6068·4 tedy je hľadaný koreň istotne 77·9. niečo viac.

Znamená-li 77·9 m^2-tre, tedy chybujúce stotiny možno i vynechať, bo pole a lúky, nemožno až na 1 dm^2 vymeriavať.

§ 26. O shodnosti trojuhelníkov.

Majú-li dva trojuhelníky rovnaké strany a rovnaké uhly, tenkráť menujeme ich *shodnými* (kongruent) trojuhelníkami. Je-li na pr. u trojuhelníkov ABC a abc $\sphericalangle A = a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle b$, $\sphericalangle C = \sphericalangle c$ a strana $AC = ac$, strana $AB = ab$ a strana $BC = bc$, tenkráť je $\triangle ABC$ shodný s $\triangle abc$. Obr. 107.



Obr. 107.

Vystrihneme-li oba tieto shodné trojuhelníky z papieru a položíme-li ich rovnakými stranami a rovnakými uhly jeden na druhý, tedy sa kryjú. A poneváč sa kryjú, preto ležia v oboch rovnakým stranám rovnaké uhly oproti. Tak na pr. rovnakým stranám AC a ac, ležia rovnaké uhly B a b, rovnakým stranám BC a bc, ležia rovnaké uhly A a a, a rovnakým stranám AB a ab, rovnaké uhly C a c oproti. A naopak, rovnakým uhlom ležia v oboch rovnaké strany, oproti. Tak na pr. rovnakým uhlom B a b ležia rovnaké strany AC a ac, rovnakým uhlom A a a ležia rovnaké strany BC a bc a rovnakým uhlom C a c ležia rovnaké strany AB a ab oproti.

Strany, ktoré ležia rovnakým uhlom oproti menujeme ***rovnakležiacimi*** stranami. Tak na pr. strany AC a ac sú rovnakležiace, bo ležia rovnakým uhlom B a b oproti; podobne, rovnakležiace strany sú BC a bc, a potom AB a ab. Prečo?

Aj uhly, ktoré ležia rovnakým stranám oproti, menujeme ***rovnakležiacimi*** uhlami. Tak na pr. $\sphericalangle B$ a $\sphericalangle b$ sú rovnakležiace, bo ležia rovnakým stranám AC a ac oproti, podobne, rovnakležiace uhly sú: A a a, a C a c. Prečo?

Uhly, ktoré ležia na jednej a tej istej strane u jej oboch koncov, menujeme ***príležiacimi*** uhlami. Tak na pr. strane AB príležiace uhly sú: $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B$; strane ab príležiace uhly, sú: $\sphericalangle a$ a $\sphericalangle b$ a t. ď.

Ponevàč dva shodné trojuhelníky rovnakými uhly jeden na druhý položené sa cele kryjú, preto sú nielen rovnaké ale i jeden druhému podobné. A ponevàč znak podobnosti je $\sim$ a znak rovnosti $=$ preto znak shodnosti je $\cong$. $\triangle ABC \cong \triangle abc$ znamená, že trojuhelník ABC je shodný s trojuhelníkom abc.

Na základe geometrických výskumov možno dva trojuhelníky i v nasledujúcich prípadoch za shodné považovať:

po prvé *jestli v oboch všetky tri strany sú rovnaké.* Tak na pr. je-li (*Obr. 107.*) $AB = ab$, $AC = ac$, a $BC = bc$, tenkráť i rovnakležiace uhly sú rovnaké a $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

po druhé, *jestli v oboch dve strany a nimi uzavretý uhol sú rovnaké.* Tak na pr. (*Obr. 107.*) jestli: $AB = ab$, $BC = bc$ a $\sphericalangle B = \sphericalangle b$.

po tretie, *jestli v oboch jedna strana a jej príležiace dva uhly sú rovnaké.* Tak na pr. jestli $AB = ab$, a $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, a $\sphericalangle B = \sphericalangle b$,

po štvrté, *jestli v oboch dve strany a dlhšej z nich oproti ležiaci uhol sú rovnaké.* Tak na pr. jestli $AC > AB$ a $ac > ab$, a jestli $AB = ab$, $AC = ac$, a $\sphericalangle B = \sphericalangle b$.

Vo všetkých týchto štyroch prípadoch sú potom i ostatné rovnakležiace strany a uhly rovnaké a následkom toho otázne trojuhelníky ABC a abc shodné.

Úlohy. 1. Nejakého trojuhelníka ABC strana: $AB = 2$ *cm*, $BC = 3$ *cm*, a $AC = 4$ *cm* dlhá; sostroj ho a nakresli k nemu druhý s ním shodný trojuhelník abc t j. odkresli ho!

Rozl. Najprv načiaram a vymeriam jednu zo strán na pr. $AB = 2$ *cm*, potom otvorom kružidla veľkosti druhej strane $BC = 3$ *cm* zodpovedajúcim opíšem z jej konečného bodu A jeden obluk, a otvorom kružidla veľkosti tretej strane $BC = 4$ *cm* zodpovedajúcim opíšem z jej druhého konečného bodu B druhý obluk nad ňou, a priesečný bod oboch oblukov spojím s A a B body dovedna. Podobne nakreslím i druhý s ním shodný $\triangle abc$.

Na základe ktorého prípadu shodnosti je nakreslený trojuhelník abc s odkresleným ABC trojuhelníkom shodný? — *Kedy* sú dva trojuhelníky vôbec shodné?

2. Nejakého trojuhelníka ABC (*Obr. 107.*) strana $AB = 2$ *cm*, strana $BC = 3$ *cm* a nimi uzavretý uhol $BAC = 120^0$; sostroj ho a potom k nemu druhý s ním shodný trojuhelník abc.

Rozl. Najprv sostrojím 120^0 veľký uhol: ABC, z jednoho ramena odrežem 2 *cm* $= BA$, z druhého 3 *cm* $= BC$ a oba konečné body spojím dovedna $= AC$. Podobne sostrojím i druhý s ním shodný $\triangle abc$.

Na základe ktorého prípadu shodnosti je nakreslený $\triangle abc$ shodný s $\triangle ABC$? *Ako* presvedčíme sa o pravdivosti tohoto tvrdenia? Odp. Vyrežeme oba z papieru a položíme jeden na druhý.

3. Nejakého trojuhelníka ABC strana $AB = 2$ *cm*, a príležiaci $\sphericalangle A = 40^0$ a $\sphericalangle B = 120^0$; sostroj ho a potom nakresli k nemu druhý s ním shodný trojuhelník abc!

Rozl. Najprv načiaram 2 *cm* dlhú prímku $= AB$, u jej jednoho konca vymeriam 40^0 u druhého 120^0 veľký uhol, a týchto slobodné ramená predĺžim, kým sa nerežú. Podobne sostrojím i druhý s ním shodný $\triangle$ *abc*.

Dľa ktorého prípadu shodnosti sú oba tieto trojuhelníky shodné?

4. Nejakého trojuhelníka ABC strana $AC = 4$ *cm*, strana $AB = 2$ *cm*, a väčšej strane proti ležiaci $\sphericalangle B$ obnáša 120^0; sostroj ho a potom nakresli k nemu druhý s ním shodný trojuhelník *abc*!

Rozl. Najprv nakreslím 120^0 veľký uhol ABC, z jednoho ramena odseknem 2 *cm* $= AB$ a z jeho konečného bodu A opíšem otvorom kružidla 4 *cm* velikým obluk, ktorý jeho druhé rameno reže, obdržaný priesečný bod C spojím s A.

Otázky. *Ktoré* uhly sú u shodných trojuhelníkov rovnaké? a ktoré strany? — *Ktoré* uhly a strany menujeme rovnakležiacimi? *Jako* zneje: prvý? druhý? tretí? a štvrtý prípad shodnosti? *Koľko* strán a uhlov či koľko podstatných čiastok trojuhelníka vyžaduje každý jeden prípad shodnosti? a ktoré sú to?

Zo všetkého o shodnosti trojuhelníkov tu povedaného nasleduje že dva *rovnoramenné* trojuhelníky sú už shodné:

po prvé, jestli v oboch základná strana a jedno rameno sú rovnaké, bo druhé rameno je toľké jako prvé;

po druhé, jestli v oboch jedno rameno a vrcholový uhol sú rovnaké, bo druhé rameno rovná sa prvému;

po tretie, jestli jedno rameno a základnej strane príležiaci uhol sú rovnaké;

po štvrté, jestli základná strana a jej príležiaci uhol sú rovnaké. Prečo?

Ďalej, že dva pravouholné trojuhelníky sú shodné:

po prvé, jestli v oboch obe katéty sú rovnaké;

po druhé, jestli jedna katéta a jeden ostrý uhol v oboch sú rovnaké (bo pravý je už rovnaký);

po tretie, jestli v oboch hypotenúsa a jeden ostrý uhol sú rovnaké;

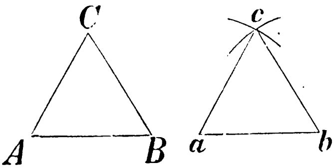
konečne, že dva rovnostranné trojuhelníky sú shodné, jestli i len jedna strana v oboch je rovnaká, bo ostatné dve strany rovnajú sa prvej.

§ 27. Rozlúštenie niekoľko geometrických úloh na shodnosti trojuhelníkov sa zakladajúcich.

1. Odkresli nejaký trojuhelník ABC! *(Obr. 108.)*

Rozl. Z nejakej ľubovoľnodlhej prímky odseknem niektorej strane trojuhelníka ABC na pr. strane AB zodpovedajúci kus *ab* a na to otvorami kružidla druhej a tretej strane zodpovedajúcimi opíšem z oboch konečných bodov *a* a *b* obluky, a týchto priesečný bod *c* spojím s *a* a b. Týmto spôsobom povstalý trojuhejnik abc je so známym ABC shodný preto, že oba majú rovnaké strany. (Viď predošlý § úloha 1.)

2. Polti nejaký uhol ABC! (Obr. 109.)

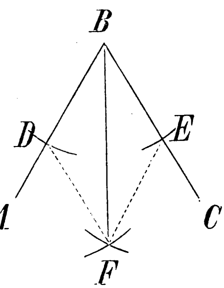


Obr. 108.

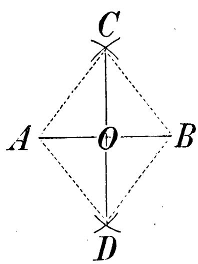
Rozl. Jedno rameno kružidla zabodnem do bodu B a druhým odseknem z ramien AB a BC rovnako veľké kusy BD a BE. Na to jako z D tak i z E opíšem tým istým (alebo i druhým) otvorom kružidla dva obluky a týchto priesečný bod F spojím s B. Prímka BF poltí uhol ABC. $\sphericalangle DBF = \sphericalangle EBF$, bo $\triangle BDF \cong \triangle BEF$. Prečo?

3. Polti prímku AB! (Obr. 110.)

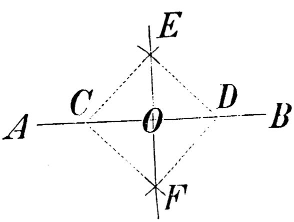
Rozl. Jedným a tým istým otvorom kružidla opíšem z A a podobne i z B dva obluky ako nad prímkou tak i pod prímkou AB a ich priesečné body C a D spojím dovedna. Prímka CD poltí prímku AB v bode O. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$. Dľa ktorého prípadu shodnosti? a $\triangle ACO \cong \triangle BCO$.



Obr. 109.



Obr. 110.



Obr. 111.

4. Postav na prímku AB v bode O kolmú! (Obr. 111.)

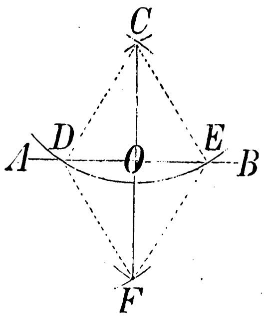
Rozl. Ako z prava tak i z ľava bodu O odseknem dva rovnaké kusy OD a OC. Nato opíšem ľubovoľným otvorom kružidla z C a D dva obluky jako nad prímkou tak i pod prímkou, a ich priesečné body E a F spojím dovedna. Prímka EF stojí na prímke AB kolmo. $\triangle ECF \cong \triangle EDF$ a $\triangle EOC \cong \triangle EOD$ a $\sphericalangle COE = \sphericalangle DOE = 90^0$.

5. Spusť zo známeho bodu C na prímku AB kolmú! (Obr. 112.)

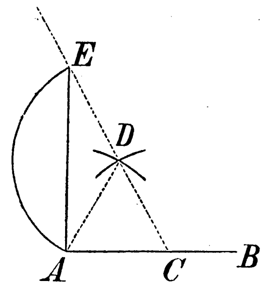
Rozl. Zo známeho bodu C opíšem obluk DE, ktorý prímku AB reže v D a E. Týmto istým otvorom kružidla opíšem ako z D tak i z E obluky pod prímkou a ich priesečný bod F spojím s C. Prímka CF stojí kolmo na AB. — $\triangle CDF \cong \triangle CEF$ a $\triangle COD \cong \triangle COE$ a $\sphericalangle COD = \sphericalangle COE = 90^0$. Prečo?

6. Postav v konečnom bode A prímky AB kolmú AE! *(Obr. 113.)*

Rozl. Ľubovoľným otvorom kružidla odseknem z BA kus AC a týmto istým otvorom kružidla opíšem ako z A tak i z C obluky nad AB a z priesečného bodu D kruh. Nato spojím bod D s C a túto prímku predĺžim až po obluk či bod E. Bod E s bodom A



Obr. 112.

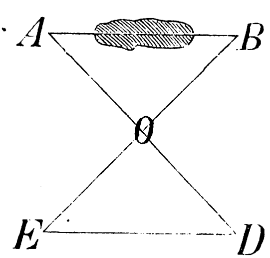


Obr. 113.

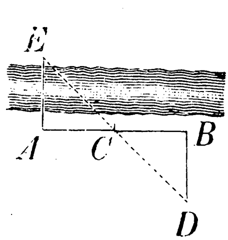
spojujúca prímka AE stojí na AB kolmo, bo $\sphericalangle EAB = 90^0$. Rovnostranného $\triangle ADC$ uhly majú po 60^0. $\sphericalangle ADE = 120^0$. Prečo? Rovnoramenného $\triangle ADE$ uhly majú po 30^0. Prečo? $\sphericalangle EAD$ a $\sphericalangle DAC = 30^0 + 60^0 = 90^0$.

7. Vymeraj dialku dvoch bodov A a B jeden od druhého, jestli medzi nimi nejaká prekážka, na pr. les, jama, vŕšek nachodí sa, ku ktorým ale z nejakého bodu O je voľný prístup? *(Obr. 114.)*

Rozl. Vykolkujem a vymeriam prímku AO a predĺžim o toľko, koľká je sama, na pr. až po D, tak že $AO = OD$. Podobne, vykolkujem a vymeriam prímku BO a predĺžim tiež o toľko, koľká je



Obr. 114.



Obr. 115.

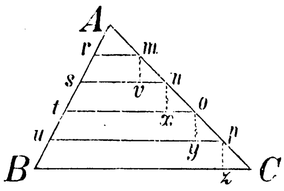
sama, na pr. až po E, tak že $BO = OE$. Dialka ED rovná sa hľadanej dialke AB. $\triangle ABO \cong EDO$. Prečo? Aké uhly sú: $\sphericalangle AOB$ a $\sphericalangle EOD$?

8. Vymeraj z pravého alebo ľavého brehu šírku rieky alebo potoka! *(Obr. 115.)*

Rozl. Na oprotnom brehu vyhľadám nejaký patrný predmet E, na pr. kriak alebo skalu a na tom brehu, kde sa nachádzam, načiaram nejakú prímku AB tak, že AE stojí na AB kolmo. Potom rozdelím AB na dve rovné čiastky, na pr. v C, tak že $AC = CB$. V bode B vykolkujem na AB druhú kolmú (v smere BD) neurčito dlhú. Konečne stanem si v bode C a visírujem najprv na bod E a v tom istom smere na poslednú kolmú, na ktorej spozorujem nejaký predmet či bod D. Prímka AE je toľká jako DB.

9. Rozdeľ nejakú prímku AB na viac, na pr. na 5 rovnakých čiastok! (*Obr. 116.*

Rozl. Ku prímke AB načiaram z bodu A druhú odbiehavú prímku AC, a ľubovoľným otvorom kružidla odseknem na nej, započnúc od A, 5 rovnakých čiastok: Am, mn, no, op, oC. Posledný bod C spojím s B, a k povstalej prímke BC načiaram cez deliace body: p, o, n, m rovnobežné: up, to, sn, rm. Tieto posledné delia AB na 5 rovných čiastok, a síce: Ar, rs, st, tu a uB. O opravdivosti tohoto pokračovania presvedčíme sa, keď považime, že trojuhelníky: Arm, mvn, nxo, oyp, pzC sú shodné (Prečo?) a že následkom toho $Ar = mv = rs$, $Ar = nx = st$ atď.



Obr. 116.

Tento istý obrazec 116. znázorňuje, že dve ľubovoľné čiastky či odseky prímky AB a týmto zodpovedajúce dva odseky prímky AC stoja v jednom a tom istom pomere.

Tak na pr. odsek Ar (prímky AB) stojí v tom pomere ku rB ako 1 : 4, a podobne i odsek Am (prímky AC) stojí v tom pomere ku mC ako 1 : 4.

Ďalej, odsek As (prímky AC) stojí v tom pomere ku sB ako 2 : 3, a podobne odsek An (prímky AC) stojí v tom pomere ku nC ako 2 : 3.

Alebo, $Ar : rB = 1 : 4$ a $As : sB = 2 : 3$
$Am : mC = 1 : 4$ a $An : nC = 2 : 3$.

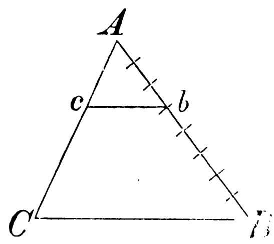
Dva páry takých odsekov, ktoré majú ten istý pomer, menujeme *úmernými*. Úmerné páry odsekov, jestli ich znakom rovnosti dovedna spojíme, tvoria, jako už známe, tak zvanú proporciu či srovnalosť.

Tak na pr. úmerné dva páry odsekov $Ar : rB$ a $Am : mC$ tvoria znakom rovnosti dovedna spojené nasledujúcu proporciu.

$Ar : rB = Am : mC$ (čítaj: Ar stojí v tom pomere k rB, ako Am k mB).

Podobne, $As : sB = An : nC$.
Ďalej. $As : At = An : Ao$
$At : AB = Ao : AC$ atď.

10. Rozdeľ prímku AC na dve nerovné čiastky dľa pomeru 3 : 5! (*Obr. 117.*)



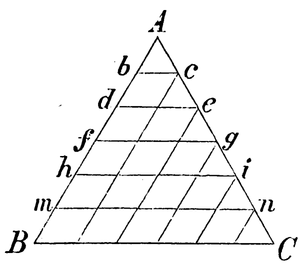
Obr. 117.

Rozl. Ku rozdeliť sa majúcej prímke AC nakreslím od začiatočného bodu A, odbiehavú AB, označím na nej počnúc od A ľubovolnodlhých 3 a 5 či 8 kusov, spojím posledný bod B s C a cez tretí deliaci bod b načiaram ku BC rovnobežnú bc. Odseky Ab a bB prímky AB stoja v tom pomere jeden k druhému ako 3 : 5, a tento istý pomer musejú mať i odseky Ac a cC prímky AC o čom sa snadno presvedčíme, jestli cez deliace body prímky AB, rovnobežné k BC načiarame. AC prímka rozdelená je v c na dve nerovné časti, dľa pomeru 3 : 5.

Úlohy. 1. Rozdeľ nejakú prímku AB na tri nerovné časti dľa pomeru 2 : 3 : 5.

§. 28. O podobnosti trojuhelníkov.

Rozdelíme-li u nejakého trojuhelníka na pr. u $\triangle ABC$ (*Obr. 118.*) jednu zo strán na pr. AB na ľubovoľný počet na pr. na 6 rovných čiastok a načiarameli cez deliace body: b, d, f, h, a m k základnej strane BC rovnobežné bc, de, fg, hi, a mn, rozpadne sa i strana AC. (Viď úlohy 9. a 10. predošlého §-u) na práve toľko či na 6 rovných čiastok, a síce: Ac, ce, eg atď. To isté stane sa i so stranou BC, jestli cez deliace body: c, e, g, i, n rovnobežné k AB načiarame. Následkom takého podelenia strán, obdržíme nasledujúce trojuhelníky: Abc, Ade, Afg, Ahi, Amn, a ABC. U všetkých týchto trojuhelníkov je uhol A spoločný. $\sphericalangle Abc = \sphericalangle Ade = \sphericalangle Afg = \sphericalangle Ahi = \sphericalangle Amn$, bo všetky tieto uhly sú protiuhly. Podobne a preto je i $\sphericalangle Acb = \sphericalangle Aed = \sphericalangle Agf = \sphericalangle Aih$ atď.



Obr. 118.

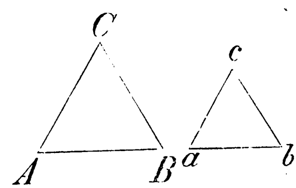
Všetky tieto trojuhelníky, majú tedy rovnaké uhly.

Považímeli u otáznych trojuhelníkov rovnak ležiace (t. j. rovnakým uhlom oproti) ležiace strany, zkúsime, že tieto sú úmerné, či že majú ten istý pomer jedna k druhej. Tak na pr. v $\triangle$ *Abc* a $\triangle$ *Ade* rovnakležiace strany *Ab* a *Ad*, potom *Ac* a *Ae* a *bc* a *de*, stoja v tom pomere jedna k druhej, ako 1 : 2 či $Ab : Ad = 1 : 2$; $bc : de = 1 : 2$; $Ac : Ae = 1 : 2$.

Podobne u trojuhelníkov *Afg* a *Amn* rovnakležiace strany: *Af* a *Am*, *Ag* a *An*, *fg* a *mn*, stoja v tom pomere jedna k druhej, ako 3 : 5, či $Af : Am = 3 : 5$; $Ag : An = 3 : 5$; $fg : mn = 3 : 5$.

Zo všetkého tu povedaného vyplýva, že každé dva z otáznych trojuhelníkov, majú rovnaké uhly a úmerné strany. *Dva trojuhelníky, jichžto uhly sú rovnaké a strany úmerné, menujeme podobnými trojuhelníkami*, následkom čoho, každé dva z otáznych trojuhelníkov sú si podobné. Znak podobnosti je, ako známe: $\backsim$ a preto podobnosť horudaných trojuhelníkov označíme takto: $\triangle\ Abc \backsim Ade$; $\triangle\ Ade \backsim \triangle\ Afg$; $\triangle\ Abc \backsim \triangle\ Ahi$; $\triangle\ Ahi \backsim \triangle\ Amn$ atď.

Sú-li tedy v dvoch trojuhelníkoch na pr. v $\triangle$ *ABC* a $\triangle$ *abc* (*obr. 119.*) uhly rovnaké, je-li na pr. $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle b$, a $\sphericalangle C = \sphericalangle c$ a je-li pomer rovnakležiacich strán $AC : ac$ toľký ako pomer strán $BC : bc$ a $AB : ab$ t. j. nachodí-li sa strana *ab* v *AB*, toľkokrát, koľkokráť *bc* v *BC*, a *ac* v *AC*, tenkráť je $\triangle\ ABC \backsim \triangle\ abc$.



Obr. 119.

Na základe geometrických výskumov známe, že dva trojuhelníky sú si jeden druhému podobné už i vtedy:

po prvé, *jestli ich všetky tri strany sú úmerné;* v tomto prípade i úmerným stranám oproti ležiace uhly sú rovnaké;

po druhé, *jestli dve strany sú úmerné a nimi uzavretý uhol je rovnaký;*

po tretie, *jestli dve strany sú úmerné a väčšej z oboch strán oproti ležiaci uhol je rovnaký;*

po štvrté, *jestli v oboch všetky tri uhly sú rovnaké.*

V každom z týchto štyroch prípadov sú potom i všetky ostatné strany úmerné a všetky ostatné uhly rovnaké, t. j. otázne dva trojuhelníky sú si podobné.

Úlohy. 1. Nejakého $\triangle$ *ABC* strana $AB = 2\ cm$, druhá $BC = 3\ cm$ a tretia $AC = 4\ cm$; sostroj ho a potom nakresli k nemu druhý, jemu podobný $\triangle$ *abc* so stranami trikrát toľkými.

Rozl. Najprv nakreslím prvý trojuhelník *ABC* (Viď 26, 1) a potom druhý △ *abc* tak, že posledného jedna strana *ab* = 3 × 2 *cm*; druhá *bc* = 3 × 3 *cm* a tretia *ac* = 3 × 4 *cm*

Ktoré strany v nakreslených trojuhelníkoch *ABC* a *abc* sú úmerné? *V akom* pomere stoja tieto úmerné strany jedna k druhej? — (Ako 1 : 3). Oprobuj uhlomerom či úmerným stranám oproti ležiace uhly sú rovnaké? — Dľa ktorého prípadu podobnosti je △ *ABC* ∾ △ *abc*? — *Kedy* sú dva trojuhelníky vôbec jeden druhému podobné? — *Krem* úmernosti strán ešte čo musí v oboch byť rovnaké? (Uhly).

2. Nejakého trojuhelníka *ABC*, jedna strana na pr. *AB* = 3 *cm*, *AC* = 4 *cm* a nimi uzavretý uhol 50°; sostroj ho a potom nakresli druhý, jemu podobný, △ *abc* so stranami 4-kráť toľkými.

Rozl. Najprv nakreslím prvý △ *ABC* (Viď § 26, 2) a potom nakreslím 50° veľký uhol, odrežem z jedneho jeho ramena 4 × 3 *cm* či 12 *cm* = *ab* a z druhého 4 × 4 *cm* či 16 *cm* = *ac* veľký kus, týchto konečné body spojím dovedna. Obdržaný △ *abc* podobá sa prvému, dľa druhého prípadu shodnosti?

Koľkokráť musí byť i strana *bc* väčšia nežli *BC*? Oprobuj, či je tomu tak, kružidlom! — *V akom* pomere stoja v oboch trojuhelníkoch, úmerné strany jedna k druhej? (Ako 1 : 4). *Ešte* ktoré uhly musejú byť v oboch trojuhelníkoch rovnaké? *Aké* uhly ležia úmerným stranám v oboch oproti? (Rovnaké). *Aké* strany ležia rovnakým uhlom oproti? (Úmerné).

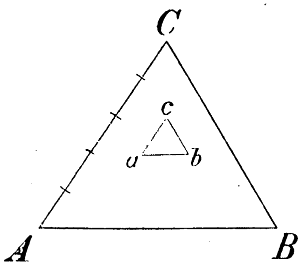
3. Nejakého △ *ABC* jedna strana *AC* = 5 *cm*, druhá *BC* = 3 *cm* a tamtej väčšej oproti ležiaci uhol = 70°; sostroj ho a potom nakresli druhý, jemu podobný trojuhelník *abc* so stranami dvakráť toľkými!

Rozl. Najprv nakreslím prvý △ *ABC* (Viď § 26, 4) potom nakreslím 70° veľký uhol, odrežem z jedneho ramena 2 × 3 *cm* či 6 *cm*, a z obdržaného deliaceho bodu *C* opíšem otvorom kružidla 2 × 5 *cm* či 10 *cm* veliký obluk, ktorý druhé rameno otázneho uhlu reže na pr. v bode *a* a spojím *a* s *c*. Obdržaný △ *abc* je podobný známemu △ *ABC*

Dľa ktorého prípadu podobnosti, sú si otázne trojuhelníky podobné? *V akom* pomere musí i tretia strana *AB*, stáť k *ab* (Ako 1 : 2). Oprobuj či je tomu tak, kružidlom? — *Ešte* ktoré uhly musejú byť v oboch rovnaké? — Presvedč sa o tom uhlomerom?

4. U nejakého △ *ABC* jeden z uhlov a síce: ∢ *A* = 50°, ∢ *B* = 70° a ∢ *C* = 60° veľké; sostroj ho a potom nakresli druhý, jemu podobný trojuhelník *abc* so stranami päťkráť menšími. (*Obr. 120.*).

Rozl. Najprv nakreslím △ *ABC*, potom rozdelím niektorú z jeho strán na pr. *AC* na päť rovných čiastok, načiaram toľkú čiaru koľká je táto pätina (na pr. ac) rovnobežne s AC, a potom cez body a a c k ostatným stranám rovnobežné ab a bc. *(Obr. 120.)* $\triangle$ *abc* je $\backsim$ $\triangle$ *ABC*, a síce dľa štvrtého prípadu podobnosti. Oba trojuhelníky majú totiž rovnaké uhly, bo odchýlka ramien u $\sphericalangle$ *A* je toľká ako u $\sphericalangle$ *a*; u $\sphericalangle$ *B* zas toľká ako u $\sphericalangle$ *b*; a u $\sphericalangle$ *C* zas toľká ako u $\sphericalangle$ *c*. *Uhly jichžto ramená sú rovnobežné, sú rovnaké.*



Obr. 120.

V akom pomere musí stáť i strana *AB* k *ab*? a strana *AC* k *ac*? (Ako 5 : 1). Oprobuj kružidlom či *ab* v *AB* a *ac* v *AC* päťkráť nachodí sa?

Dľa tohoto posledného prípadu podobnosti k nejakému známemu trojuhelníku druhý jemu podobný nakreslíme, jestli ku každej z jeho strán rovnobežné prímky načiarame. Dva trojuhelníky, *jichžto strany sú rovnobežné*, sú si podobné.

Sú-li u dvoch trojuhelníkov dva uhly rovnaké, tenkráť musí tretí uhol v oboch tiež rovnaký byť, bo tretí uhol doplňuje oné dva rovnaké do 180°. Preto, posledný prípad shodnosti možno ešte i takto vysloviť:

dva trojuhelníky sú si podobné, jestli v oboch dva uhly sú rovnaké.

Poneváč u pravouhelných trojuhelníkov pravý uhol je už rovnaký, a dva ostré uhly majú dovedna 90°, preto dva pravouhelné trojuhelníky sú si podobné, jestli v oboch i len jeden ostrý uhol je rovnaký.

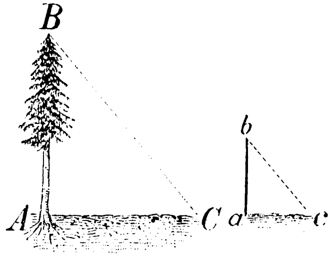
Taktiež dva rovnoramenné trojuhelníky sú si podobné, jestli i len jeden rovnak ležiaci uhol je rovnaký.

Konečne, dva rovnostranné trojuhelníky sú si vždy podobné, bo u oboch každý z uhlov je 60° veľký.

§ 29. O vymeriavaní výšky predmetov na základe podrobnosti trojuhelníkov.

Na základe podobnosti trojuhelníkov možno výšku predmetov na pr. výšku stromu alebo výšku väže z ich tône či tieňu vypočítať.

Postavíme-li opodial nejakého stromu AB *(Obr. 121.)* jehož tieň označuje AC nejakú palicu či týčku *ab* kolmo, bude jej tieň *ac* v tom istom smere čo AC nachodiť sa. Spojíme-li v mysli bod B s bodom



Obr. 121.

C a bod b s bodom c, obdržíme dva pravouhelné trojuhelníky ABC a abc. Poneváč oba tieto trojuhelníky majú rovnaké uhly, preto sú si podobné, následkom čoho sú ich rovnak ležiace strany AB a ab, potom AC a ac úmerné, t. j. koľkokráť tieň ac v tiene AC nachodí sa, toľkokráť je strom AB vyšší, nežli-týčka ab. Je-li na pr. tieň AC 5-kráť toľký ako tieň ac, tedy je i strom AB 5-kráť vyšší nežli ab. Známe-li dĺžku týčky ab, tedy výšku stromu obdržíme, jestli tamtú s otáznym podielom z oboch tieňov násobíme.

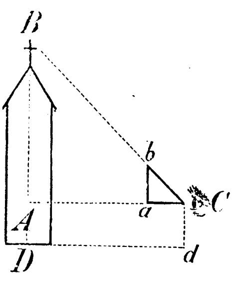
$$AB = \frac{AC}{ac} \times ab, \text{ bo } AB : ab = AC : ac$$

Má-li na pr. tieň $AC = 4\ m\ 5\ dm$, $ac = 4\ dm$ a ab týčka $=$ $8\ dm$, tedy obnáša výška otázneho stromu $AB = \frac{45}{4} \times 8 =$ $11.25 \times 8 = 90\ dm$.

Je-li otázna týčka práve 1 m dlhá (od zeme až po vrch rátajúc) vtedy má otázny strom toľko metrov, koľkokráť tieň ac v tiene AC nachodí sa.

Nachodí-li sa tieň 1 m dlhej týčky v tiene stromu AB 7.4-kráť, tenkráť je i výška stromu 7.4 m.

Nesvieti-li slnce, tenkráť výšku nejakého predmetu na pr. výšku väže BD nájdeme, *(Obr. 122.)* jestli pravouhelným a *rovnoramenným* trojuhelníkom abC pozdĺž jeho hypotenúsy bC na vrchol väže visírujeme, tak, že bod B v smere hypotenúsy bC nachodí sa a katéta aC leží vodorovno. Aj v tomto prípade obdržíme dva podobné trojuhelníky ABC a abC. Poneváč ale $\triangle\ abC$ je rovnoramenný, t. j. $ab = aC$, preto je i $AB = AC$ t. j. výška AB je toľká, ako diaľka oka od stredu väže či ako AC. Pridáme-li k AB ešte i výšku AD alebo Cd t. j. kolmú diaľku oka od zem, obdržíme $AD + AB$ t. j. výšku celej veže BD.

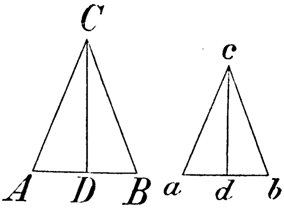


Obr. 122.

§ 30. O pomere výšok, obvodov a štvorcového obsahu dvoch podobných trojuhelníkov.

Pustíme-li v dvoch podobných trojuhelníkoch na pr. v $\triangle\ ABC$ a $\triangle\ abc$ *(Obr. 123.)* z vrchoľu rovnakležiacich uhlov C a c, na oprotnú stranu AB a ab kolmé CD a cd, obdržíme takzvané výšky otáznych trojuhelníkov. Tieto výšky stoja v tom istom pomere jedna k druhej, ako rovnakležiace strany poťažných trojuhelníkov, či $CD : cd = AB : ab$ alebo $CD : cd = AC : ac$ atď.

Je-li tedy u dvoch podobných trojuhelníkov z rovnakležiacich strán jedna 10-kráť väčšia než druhá, tedy je i tamtoho výška 10-kráť väčšia než tohoto.



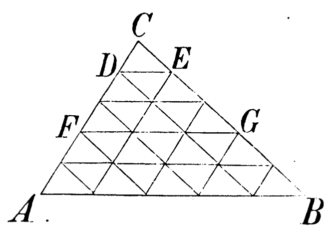
Obr. 123.

O pravdivosti tohoto snadno sa presvedčíme, keď povážime, že na pr. $\triangle ADC$ a $\triangle adc$ majú dva rovnaké uhly, a síce $\sphericalangle A = \sphericalangle a$; bo $\sphericalangle ABC$ je, ako sme riekli, podobný $\sphericalangle abc$. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle adc = 90^0$. Sú-li ale dva uhly rovnaké, tedy je i tretí $\sphericalangle ACD = \sphericalangle acd$, následkom tohoto je $\triangle ADC \sim \triangle adc$. V podobných trojuhelníkoch sú ale rovnakležiace strany úmerné, či $AC : ac = CD : cd$ a preto i $AB : ab = CD : cd$.

Otázky. 1. Jestli pomer rovnakležiacich strán u dvoch podobných trojuhelníkov je: *a*) 1 : 3 *b*) 1 : 10 *c*) 1 : 100 a jestli prvého trojuhelníka strany majú: 5 *cm*, 7 *cm* a 8 *cm*, koľko *cm*-ov má každá jedna strana druhého trojuhelníka, v každom z týchto troch prípadov? Odp. *a*) 15 *cm*, 21 *cm*, 24 *cm* *b*) 50 *cm*, 70 *cm*, 80 *cm* *c*) 500 *cm*, 700 *cm*, 800 *cm*. A v akom pomere stoja ich výšky jedna k druhej? Odp. Tiež ako 1 : 3, poťažne 1 : 10 a 1 : 100.

2. Jestli u dvoch podobných trojuhelníkov rovnakležiace strany, stoja v tom pomere jedna k druhej, ako 3 : 2, a jestli u prvého výška obnáša 9 *cm*, koľko *cm*-ov obnáša výška u druhého trojuhelníka? (Odp. 6 *cm*).

Je-li u $\triangle DEC$ a u $\triangle ABC$ (*Obr. 124.*), ktoré sú si podobné, pomer rovnakležiacich strán ako 1 : 5 a ma-li $\triangle DCE$ v obvode na pr. 3 *cm*, tedy musí obvod $\triangle ABC$ 5-kráť toľký byť či 15 *cm*-ov obnášať. Bo, keď u $\triangle ABC$ každá strana je 5-kráť väčšia nežli u $\triangle CDE$, tedy je i jeho obvod t. j. súčet všetkých troch strán 5-kráť väčší. Z tohoto vyplýva, že *u dvoch podobných trojuhelníkov i obvody stoja v tom pomere jeden k druhému, ako ich rovnakležiace strany.*



Obr. 124.

Rozdelíme-li u $\triangle ABC$ každú stranu (*obr. 124.*) na 5 rovných čiastok a načiarame-li cez deliace body ku každej strane rovnobežné, rozpadne sa celý trojuhelník na 5 $\times$ 5 či 25 rovnakých trojuhelníkov. $\triangle ABC$ je podobný $\triangle DEC$, bo oba majú rovnaké uhly a ich rovnakležiace strany stoja v tom pomere jedna k druhej, ako 5 : 1. Srovnáme-li plochu celého trojuhelníka ABC s plochou $\triangle DCE$, zkúsime, že tamtoho celá plocha je 5×5 či 25-kráť väčšia, než tohoto, či že ich plochy že stoja v tom pomere jedna k druhej, ako $25 : 1$ či $5^2 : 1^2$.

Podobne i $\triangle$ *ABC* a $\triangle$ *FGC* sú si podobné, bo majú rovnaké uhly a ich rovnakležiace strany stoja v tom pomere jedna k druhej, ako $5 : 3$. Srovnáme-li plochu $\triangle$ *ABC* s plochou $\triangle$ *FGC*, zkúsime, že tamtoho plocha obsahuje 25 a tohoto 9 otáznych trojuhelníkov, na ktoré sme $\triangle$ *ABC* rozdelili. Pre túto príčinu stoja ich plochy v tom pomere jedna k druhej, ako $25 : 9$ či $5^2 : 3^2$. Z tohoto vyplýva, *že štvorcové obsahy dvoch podobných trojuhelníkov stoja v tom pomere jeden k druhému, ako druhé mocniny čili kvadraty ich rovnakležiacich strán.*

Podobne, majú-li u dvoch podobných trojuhelníkov dve rovnakležiace strany, jedna 6 *m* a druhá 2 *m*, tedy stoja ich plochy v tom pomere jedna k druhej, ako $6^2 : 2^2$ či $36 : 4$, t. j. plocha prvšieho trojuhelníka je 9-kráť väčšia než posledného.

Úlohy. 1. Nakresli k nejakému trojuhelníku *ABC* druhý $\triangle$ *abc*, ktorý je predešlému podobný a ktorého štvorcový obsah je 9-kráť menší nežli prvého trojuhelníka!

Koľkokráť musí druhého trojuhelníka každá strana menšia byť nežli prvého?

2. Nakresli k nejakému pravouhelnému trojuhelníku *ABC* druhý, 16-kráť menší a jemu podobný $\triangle$ *abc*.

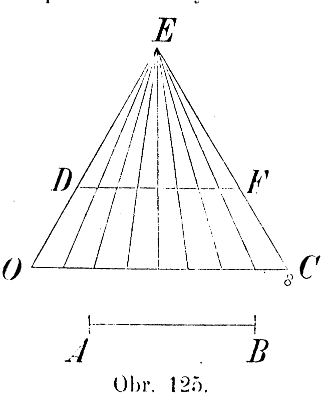
Koľkokráť musí $\triangle$ *ABC* každá strana väčšia byť, nežli $\triangle$ *abc*?

3. Nejakého trojuhelníka *ABC* plocha má 100 cm^2, nakresli k nemu druhý jemu podobný $\triangle$ *abc*, jehož plocha má 16 cm^2.

V akom pomere stoja u oboch trojuhelníkov rovnak ležiace strany jedna k druhej? Odp. Ako kvadrátne korene z ich plôch či $10 : 4$. Viď str. 90.

§ 31. O delení prímok na rovné čiastky.

V predošlom vysvetlili sme, ako delíme prímky na rovnaké čiastky dľa oka. Teraz vysvetlíme a znázorníme dôkladnejšie spôsoby delenia, ktoré na podobnosti trojuhelníkov sa zakladajú.



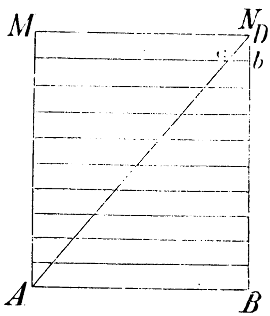
Obr. 125.

Úloha. 1. Rozdeľ prímku *AB* na 8 rovných čiastok! *(Obr. 125.)*

Rozl. Načiarame ľubovoľnodlhú prímku *OC* a odsekneme na nej počnúc od začiatočného jej konca *O*, osem ľubovoľnoveľkých avšak rovných čiastok. Na to opíšeme otvorom kružidla *O8* veľkým ako z bodu *O* tak i z bodu *8* obluky, ktoré sa režú v *E*. Následkom tohoto povstane rovnostranný trojuhelník $O8E$. Opíšeme-li teraz otvorom prímke AB zodpovedajúcim z bodu E obluk, ktorý obe strany otázneho trojuhelníka v bode D a v bode F reže a spojíme-li D s F a deliace body prímky $O8$ s bodom E, rozpadne sa DF na 8 rovných čiastok. Prímka AB je ale toľká ako DF, bo $\triangle$ DEF je rovnostranný. Prečo? Odp. Bo $O8E$ je tiež rovnostranný

Úloha 2. Rozdeľ prímku AB na 10 rovných čiastok. *(Obr. 126.)*

Rozl. U oboch koncov prímky AB postavíme dve kolmé, AM a BN a odsekneme na každej, počnúc od podnožného bodu 10 rovných kusov. Na to ťaháme cez oprotné deliace body rovnobežné a spojíme bod D s A priečnicou AD. Táto poslednia delí otázne rovnobečné na nerovnoveľké kusy, z ktorých prvý či ab je práve $^1/_{10}$ z AB, druhý nasledujúci $^2/_{10}$ AB, tretí $^3/_{10}$ AB atď.



Obr. 126.

Úlohy. 1. Vezmi do kružidla (*obr. 126.*): *a*) $^3/_{10}$ AB, *b*) $^7/_{10}$ AB, *c*) $^4/_{10}$ AB atď. *V akom* pomere stojí kus ab k AB? ($^1/_{10}$: 1) Prvý kus ab k nasledujúcemu druhému kusu? ($^1/_{10}$: $^2/_{10}$) atď.

2. Nakresli ľubovoľnedlhú prímku, a označ na nej: *a*) AB veľký kus, *b*) AB a $^1/_{10}$ AB, *c*) AB a $^4/_{10}$ AB atď.

3. Nakresli ľubovoľnedlhú prímku a rozdeľ ju tým spôsobom ako BA: i na 8, na 12 rovných čiastok!

Koľko rovných kusov odsekneme v týchto posledných dvoch prípadoch, z každej kolmej?

Na tejto poslednej úlohe zakladá sa sostrojenie takzvaného zmenšeného merťuchu.

§ 32. O zmenšenom merťuchu.

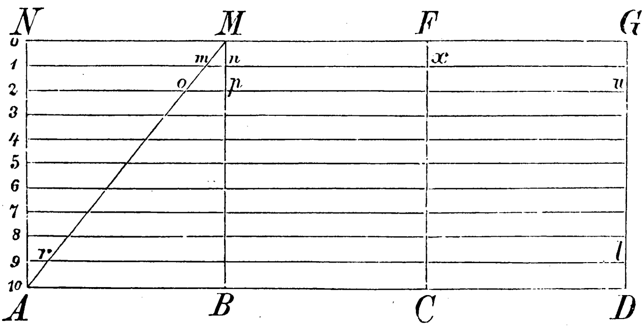
Ako sme už riekli, na poli a vôbec vonká v prírode vymerané prímky alebo prímkami ohraničené plochy, kreslíme na papieri vždy zmenšeno, dľa istého, ľubovoľného pomeru. Dosiaľ či v predošlých úlohách upotrebili sme za zmenšený merťuch: meter a jeho podčiastky. Pri kratších, len niekoľko metrov dlhých prímkach, je takýto merťuch dostatočný. Chceme-li avšak sto, alebo viac sto metrov dlhé prímky zmenšeno na papieri načiarať, musíme za jednotku zmenšeného merťuchu nie meter, ale inú ľubovoľnomalú prímku zvoliť. Tým cieľom nakreslíme nejakú ľubovoľnodlhú prímku a odsekneme z nej, počnúc od začiatočného bodu, rovnaké kusy, z ktorých každý jeden predstavuje na pr. 100 *m*. Tak na pr. kus *AB* (*obr. 127.*) znamená 100 *m*; kus *BC* tiež 100 *m*, kus *CD* tiež 100 *m* atď.

Obr. 127.

Dľa tohoto v skutočnosti vymeranej 100 *m* dlhej prímke zodpovedá na papieri kus *AB*; v skutočnosti vymeranej, 200 *m* dlhej prímke, zodpovedá na papieri kus *AC*; v skutočnosti 300 *m* dlhej prímke, zodpovedá na papieri kus *AD* atď.

A naopak, kusu *AB* zodpovedá v skutočnosti 100 *m*; ku *AC* zodpovedá v skutočnosti 200 *m*; kusu *AD* zodpovedá v skutočnosti 300 *m* atď.

Znamená-li ale kus *AB* 100 *m*, tak jedna jeho desiata časť či $^1/_{10}$ z *AB* znamená 10 *m*; dve jeho desatiny či $^2/_{10}$ z *AB* znamenajú 20 *m*; tri jeho desatiny či $^3/_{10}$ z *AB* znamenajú 30 *m* atď.



Obr. 128.

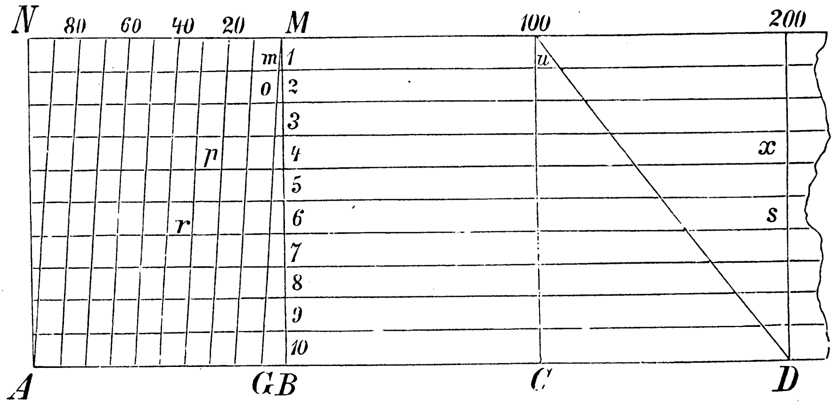
Aby sme i tieto desatiny kusu *AB* obdržali, postavme (*obr. 128.*) v bodoch *A*, *B*, *C*, *D*, atď. kolmé, odseknime na každej kružidlom, počnúc od spodku 10 rovných čiastok, načiarajme cez deliace body rovnobežné a posledný bod *M* druhej kolmej čiary spojme so začiatočným *A* prvej kolmej čiary. Priečnica *AM*, ako to už známe, delí medzi *AN* a *BM* kolmými nalezajúce sa rovnobežné a rovné kusy na nerovné čiastky, z ktorých prvá či *mn* je $^1/_{10}$ z *AB*, nasledujúca *op*, sú $^2/_{10}$ z *AB* atď. Prečo?

Dľa tohoto merťuchu kus *mx* znamená 110 *m*, t. j. toľkému kusu na papieri ako je *mx*, zodpovedá v skutočnosti 110 *m* dlhá prímka a naopak, v skutočnosti 110 *m* dlhej prímke zodpovedá na papieri kus *mx*; podobne, kus *ou* znamená 220 *m*, t. j. toľkému kusu na papieri, ako je *ou*, zodpovedá v skutočnosti 220 *m* dlhá prímka, a naopak, 220 *m* dlhej prímke v skutočnosti zodpovedá na papieri kus *ou* atď.

Úlohy. Vezmi do kružidla: 60 *m*! 180 *m*! 340 *m* zodpovedajúci kus! Koľko *m* zodpovedá v skutočnosti kusu *rl*? Odp. 290 *m*.

Znamená-li ale, ako sme už riekli, kus *AB* 100 *m*, tak jedna stotina z *AB* či $^1/_{100}$ z *AB* znamená 1 *m*; dve stotiny z *AB* či $^2/_{100}$ z *AB* znamenajú 2 *m* atď. A naopak. jednej stotiny z *AB* zodpovedá v skutočnosti 1 *m*; dvom stotinám z *AB* zodpovedajú v skutočnosti 2 *m* atď.

Aby sme i tieto stotiny kusu *AB* obdržali, rozdeľme *AB* (*obr. 129*) a podobne i najvyšší s ním rovnobežný a rovný kus *MN*,



Obr. 129.

každý o sebe, na 10 rovných čiastok a spojme vrchného kusu bod *M* so spodného kusu budom *G* a podobne i nasledujúce body vrchného a spodného kusu jeden s druhým, tak ako to obr. 129. znázorňuje. Týmto spôsobom obdržíme stotiny z AB, bo *m* 1 je $^1/_{10}$ z *G*B, poneváč ale *GB* je $^1/_{10}$ z *A*B, tedy *m* 1 je $^1/_{100}$ z *AB*. Podobne 02 sú $^2/_{10}$ z *GB*, poneváč ale *GB* je $^1/_{10}$ z *AB*, tedy 02 sú $^2/_{100}$ z *A*B atď.

Dľa tohoto merťuchu kus *mu* znamená 101 *m* t. j. toľkému kusu na papieri ako je *mu* zodpovedá v skutočnosti 101 *m* dlhá prímka a naopak, v skutočnosti 101 *m* dlhej prímke zodpovedá na papieri *mu*; podobne kus *px* znamená 224 *m* t. j. toľkému kusu na papieri ako je *px*, zodpovedá v skutočnosti 224 *m* dlhá prímka. a naopak, v skutočnosti 224 *m* dlhej prímke, zodpovedá na papieri toľký kus ako je *px*, atď.

Úlohy a otázky. 1. Vezmi do kružidla: *a)* 120 *m*! *b*) 235 *m*! *c)* 156 *m* zodpovedajúci kus! 2. Koľko metrom zodpovedá kusu *rs*? (Odp. 236 *m*).

Pomocou tu zobrazeného merťuchu možno len celé metre zmenšeno na papierí označiť, bo najmenšia jeho podčiastka *m* 1 zodpovedá 1 *m*.

Koľkokrát zmenšuje tento merťuch? Na túto otázku odpoveď najdeme, keď skutočnú dĺžku prímky *AB* so 100 metrami porovnáme. Koľkokrát totiž prímka *AB* v 100 *m* dlhej prímke nachodí sa, toľkokrát je prímka *AB* menšia než 100 *m*. Je-li na pr. prímka *AB* skutočne 4 *cm* veľká, tedy tento merťuch zmenšuje toľkokrát, koľkokrát 4 *cm* v 100 *m* nachodia sa. A ponevác 4 *cm* v 100 *m* 2500 krát sú obsažené, tedy tento merťuch zmenšuje 2500 krát, bo 100 *m* : *AB* = 2500 : 1.

Chceme-li upotrebením tohoto merťuchu i v skutočnosti vymerané *dm*-tre zmenšeno na papieri označiť, v tom prípade musí prímka *AB* nie 100 lež 10 *m* znamenať. V tomto prípade znamená kus *GB* potom 1 *m*, a kus *m* 1 zas 1 *dm*.

K nakresleniu v skutočnosti vymeraných *cm*-trov musí prímka *AB* 1 *m*-tru zodpovedať. Bo, znamená-li *AB* 1 *m*, tedy znamená *GB* desaťkrát menej či 1 *dm*, a *m* 1 znamená ešte 10 krát menej než *GB* či 1 *cm*.

Úlohy. Sostroj vlastnoručne tu znázornený merťuch a nakresli dľa neho zmenšeno: 216 *m*! 304 *m*! 106 *m*! dlhé čiary, vezmúc za 100 *m* prímku *AB*. Podobne, nakresli dľa neho zmenšeno: 2 *m* 40 *cm*! 3 *m* 18 *cm*! 5 *m* 45 *cm* dlhé prímky. vezmúc za 1 *m* prímku *AB*.

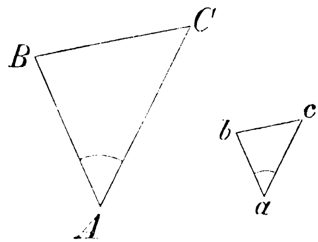
§ 33. O sostrojovaní podobnýh trojuhelníkov s pomocou zmenšeného merťuchu.

Medzi najvážnejšie meričské úlohy, pri vymeriavaní: lesov, lúk alebo poľa, patrí: sostrojovanie podobných trojuhelníkov pomocou zmenšeného merťuchu. Chceme-li totiž nejaký na poli a vôbec v slobodnom vyznamenaný trojuhelník vymerať, musíme prv k nemu druhý, jemu podobný, na papieri sostrojiť. Úlohu túto rozlúštime, jestli na poli a vôbec v slobodnom drúčkami vyznamenaného trojuhelníka, alebo *a)* všetky tri strany, alebo *b)* dve strany a nimi uzavretý uhol, alebo *c)* jednu stranu a dva jej priležiace uhly, alebo *d)* dve strany a dlhšej z nich oproti ležiaci uhol vymeriame a na papier zmenšeno, v tom istom poriadku prenesieme. Spôsob tohoto sostrojovania vysvetlujú nasledujúce úlohy.

Úloha. 1. Nejakého v slobodnom vyznamenaného trojuhelníka *ABC*, strana *AB* = 35 *m*, strana *AC* = 46 *m*, a strana *BC* = 28 *m*, nakresli na parieri druhý jemu podobný dľa pomeru 100 : 1.

Rozl. Vezmem na zmenšenom merťuchu do kružidla 35 *m*, 46 *m* a 28 metrom zodpovedajúce kusy či dialky a sostrojím z nich trojuhelník *abc* (viď § 26.). Ponevač u oboch týchto trojuhelníkov všetky tri strany sú úmerné, bo stoja v tom pomere ako 100 : 1, preto sú otázne dva trojuhelníky či ABC a abc jeden druhému podobné. Dľa ktorého prípadu podobnosti? (Viď § 28.).

2. Nejakého v slobodnom drúčkami označeného $\triangle ABC$, strana $AB = 48$ *m*, strana $AC = 45$ *m* a nimi uzavretý uhol BAC (*obr. 130.*) $= 42^0$ nakresli, dľa pomeru 100 : 1 k nemu druhý jemu podobný $\triangle$ *abc*. (Spôsob merania uhlov na poli, vysvetluje § 15. obr. 52.).



Obr. 130.

Rozl. Nakreslím 42^0 veľký uhol a odrežem dľa zmenšeného merťuchu, z jeho ramien 84 *m* a 45 *m* zodpovedajúce kusy a týchto slobodné konce spojím dovedna. (Viď § 26, 2.).

Dľa ktorého prípadu podobnosti sú si tieto trojuhelníky podobné?

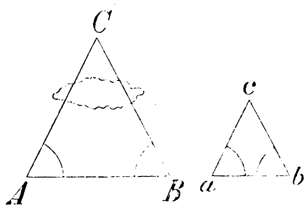
3. Nejakého v slobodnom vyznamenaného trojuhelníka ABC, strana $AB = 120$ *m*, jej priležiace uhly 78^0 a 64^0; nakresli druhý, jemu podobný $\triangle$ *abc* so stranami 100 krát menšími! či dľa pomeru 100 : 1.

Rozl Načiaram 120 *m* zodpovedajúcu prímku, dľa zmenšeného merťuchu. U oboch koncov poslednej označím uhlomerom 78^0 a 64^0 veľké uhly a predĺžim ich slobodné ramená až dotiaľ, kým sa nerežú. Povstalý $\triangle$ *abc* je podobný známemu na poli vyznamenanému. (Viď § 26, 3.).

4. Nejakého trojuhelníka ABC jedna so strán na pr. $AB = 76$ *m* druhá $AC = 104$ *m* a tej poslednej či väčšej oproti ležiaci uhol CBA je 80^0; nakresli druhý jemu podobný $\triangle$ *abc*, so stranami 100 krát menšími.

Rozl. Najprv načiaram strane AB či 76 *m* zodpovedajúcu prímku *ab*. V jej jednom konci *b* vymeriam 80^0 veľký uhol, a z druhého jej konca *a* opíšem 104 *m* zodpovedajúcim otvorom kružidla obluk, tak, že reže slobodné rameno odkresleného uhlu a obdržaný prierezný bod *c* spojím s *a* bodom. $\triangle$ *abc* je podobný $\triangle ABC$. (Viď § 26, 4.).

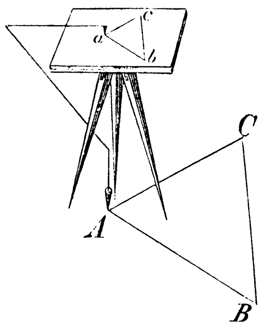
Poznámka 1. Nemožno-li pre nejakú prekážku, na pr. vodu, len jednu zo strán otázneho trojuhelníka, na pr. stranu AB, vymerať, vtedy jemu podobný druhý trojuhelník *abc* (*Obr. 131.*) tak obdržíme, jestli najprv túto stranu dľa zmenšeného merťuchu nakreslíme a potom u jej oboch koncov priležiace uhly A a B v tom



Obr. 131.

istom poriadku sostrojíme. Povstalý $\triangle$ *abc* je známemu $\triangle$ *ABC* podobný.

Poznámka 2. Odborní zememerači sostrojujú k nejakému troma drúčkami *A*, *B*, *C*, na poli vyznamenanému trojuhelníku druhý jemu podobný trojuhelník, nasledujúcim ešte jednoduchejším spôsobom. V niektorom z udaných troch bodov, na pr. v bode *A* postavia *vodorovno* tak zvaný merací stolík *(Obr. 132.)*, na ktorom nachodí sa prilepený hneď i papier, na ktorý kreslia a visírujú *hneď zo stolíka* najprv na bod *B* v smere strany *AB* a potom na bod *C* v smere strany *AC* zvláštnym prístrojom, tak zvaným dioptrom. Miesto posledného možno upotrebiť drevený (alebo mosadzový) na jednom zo svojich krajov dvoma do hora trčiacimi kolčekami opatrený linonár. *(Obr. 133.)* Tieto kolčeky slúža k visírovaniu. Najprv visírujú od bodu *A* cez kolčeky na bod *B* v smere strany *AB*, a potom na bod *C* v smere strany *AC* a hneď i načiarajú pozdĺž linonáru popri kolčekoch ako strane *AB* tak i strane *BC* zodpovedajúce prímky na papier. Potom vymerajú skutočnú dĺžku ako strany *AB* tak i strany *AC* a odrežú z oboch ramien povstalého uhlu *cab* dľa zmenšeného merťuchu im zodpovedajúce diaľky či kusy *ab* a *ac* a obdržané konečné body *b* a *c* spojia dovedna prímkou. Týmto spôsobom povstane na papieri $\triangle$ *abc*, ktorý je vyznamenanému $\triangle$ *ABC* cele podobný. Pravda že počas visírovania a čiarania musí bod *a* nad bodom *A* nachodiť sa, následkom čoho i na papieri načiaraná strana *ab* musí ležať nad *AB* a strana *ac* nad *AC* v jednom a tom istom smere a v jednom a tom istom úrovni. Aby bod *a* na papieri práve nad skutočným bodom *A* nachodil sa, k prevedeniu toho upotrebujú zvláštnu vidlicu. (*Obr. 132.*) Vrchná ihlica tejto vidlice opatrená je na dol obráteným háčikom, a zo spodnej visí na dol závaž. Ako háčik tak i závaž majú jeden a ten istý smer, t. j. ležia v jednej a tej istej kolmej. Pred visírovaním a čiaraním postavia najprv stolík vodorovno, zapichnú doň háčikom otáznu vidlicu tak, že závaž na bod *A* ukazuje.



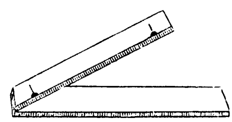
Obr. 132.


Obr. 133.

Nemožno-li pre nejakú prekážku len jednu stranu nejakého na poli vyznamenaného trojuhelníka *ABC* vymerať *(Obr. 131.)*, tedy vymerajú a nakreslia dľa zmenšeného merťuchu len tejto zodpovedajúcu prímku *ab* a u jej oboch koncov potom jej priležiace uhly *A* a *B*. K odkresleniu uhlu *A* postavia stolík vodorovno nad bod *A*, tak že a leží nad A a prímka ab v smere prímky AB. Na to visírujú hor udaným linonárom v smere strany AC či z A na C a načiarajú pozdĺž neho prímku. Po odkreslení $\sphericalangle\, A$ či $\sphericalangle\, CAB$ prenesú stolík nad bod B a postavia zas tak, že bod b leží nad B a že prímka ab leží zas v smere prímky AB. Nato visírujú zas z B na C a načiarajú pozdĺž linonára v jeho smere prímku. Týmto spôsobom nakreslený uhol rovná sa $\sphericalangle\, B$ či $\sphericalangle\, ABC$. Predĺžime-li teraz slobodné ramená oboch odkreslených uhlov, kým sa nerežú, obržíme $\triangle\, abc$, ktorý je danému $\triangle\, ABC$ cele podobný.

Ležia-li strany sostrojiť sa majúceho trojuhelníka v úbočí či vo vršku, a hľadáme-li len jeho plodonosnú plochu, tenkráť vezmeme miesto skutočnej ich dĺžky len im zodpovedajúce prômety, ktoré na už v § 5. udaný spôsob vyvážime a vymeriame.

K odkresleniu uhlov, ichžto ramená ťahajú sa na hor či do úboče, slúži na obr. 134. nakreslený linonár, ktorý skladá sa z dvoch nerovných čiastok, jedna s druhou záväzkami spojených. Kratšia časť dá sa dľa potreby nakloniť a opatrená je u jedneho kraja dvoma kolčekami k visírovaniu slúžiacimi. Dlhšia časť zastupuje linonár a leží počas visírovania na stolíku vodorovno. Pozdĺž poslednej načiarané prímky predstavujú hneď i vodorovné prômety kratšou časťou linonára visírovaných strán.

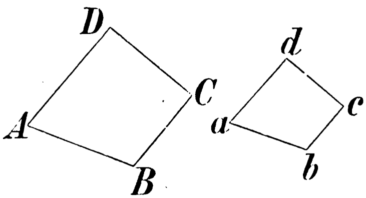


Obr. 134.

§ 34. O podobnosti štvor-, päť- a vôbec mnohouhelníkov.

Dva štvor-, päť- a vôbec mnohouhelníky sú jeden druhému podobné: jestli v oboch všetky uhly v jednom a tom istom poriadku, na pr. z ľava v pravo alebo z prava v ľavo rátajúc, sú rovnaké a im zodpovedajúce či rovnakležiace strany úmerné.

Tak na pr. štvoruhelník $ABCD$ *(Obr. 135.)* je podobný štvoruhelníku $abcd$, jestli $\sphericalangle\, A = \sphericalangle\, a$, $\sphericalangle\, B = \sphericalangle\, b$, $\sphericalangle\, C = \sphericalangle\, c$, $\sphericalangle\, D = \sphericalangle\, d$, a jestli pomer strany $AB : ab$ je toľký jako pomer strany $BC : bc$ a pomer strany $BC : bc$ je toľký jako pomer strany $CD : cd$ atď. či jestli $AB : ab = BC : : bc = CD : cd = DA : da$.



Obr. 135.

Poneváč u obďalníkov všetky uhly sú pravé, preto dva obďalníky sú si už podobné, jestli v oboch dve susedné strany sú úmerné.

Podobnosť dvoch obdĺžnikov závisí tedy len od úmernosti dvoch jeden a ten istý uhol uzavierajúcich strán.

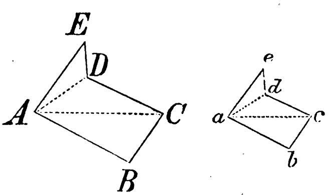
Ďalej, dva kosoštvorce sú si podobné, jestli v oboch alebo jeden ostrý alebo jeden tupý uhol je rovnaký, bo strany stoja v jednom a tom istom pomere jedna k druhej, a preto sú úmerné. Podobnosť dvoch kosoštvorcov závisí tedy len od rovnakosti jedneho z uhlov.

Podobne, dva kosodĺžniky sú si už podobné, jestli v oboch jeden z uhlov je rovnaký a jestli uzavierajúce ho strany sú úmerné, bo je-li jeden z uhlov v oboch rovnaký, tedy sú i všetky ostatné v oboch rovnaké, a jestli dve jeden a ten istý uhol uzavierajúce strany sú úmerné, tedy i ostatné dve sú tiež úmerné. Podobnosť dvoch kosodĺžnikov závisí tedy jedine od rovnakosti jedneho z uhlov a od úmernosti dvoch tenže uhol uzavierajúcich strán.

Kedy sú si dva rovnostranné lichobežníky už podobné?

Ostatné štvor-, päť- a mnohouhelníky, jako sme už riekli, sú si len vtedy podobné, jestli ich všetky v jednom a tom istom poriadku po sebe nasledujúce uhly sú rovnaké a všetky v jednom a tom istom poriadku po sebe nasledujúce strany úmerné.

Tak na pr. päťuhelník *ABCDE* (*Obr. 136.*) je podobný päťuhelníku *abcde*, jestli $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle b$, $\sphericalangle C = \sphericalangle c$, $\sphericalangle D = \sphericalangle d$ a $\sphericalangle E = \sphericalangle e$ a jestli $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea$.



Obr. 136.

Dva pravidelné štvor-, päť- a vôbec mnohouhelníky sú si vždy podobné, bo ich uhly sú rovnaké a strany úmerné. Tak na pr. dva štvorce jakejkoľvek veľkosti sú si vždy podobné, bo ich uhly sú rovnaké, 90° veľké a strany úmerné, a podobne dva pravidelné päť-, šesť-, sedemuhelníky atď.

Načiarame-li v podobných mnohouhelníkoch *ABCDE* a *abcde* od rovnakých uhlov *A* a *a* k ostatným uhlom priečnice, rozpadnú sa oba na podobné a jeden po druhom v tom istom poriadku nasledujúce trojuhelníky: *ABC* a *abc*, *ACD* a *acd*, *ADE* a *ade*. $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle ACD \sim \triangle acd$, a $\triangle ADE \sim \triangle ade$. (Obr. 136.)

A naopak, sostavíme-li trojuhelníky: *ABC*, *ACD*, a *ADE* a podobne i trojuhelníky: *abc*, *acd* a *ade* v rovnakom poriadku jeden k druhému: obdržíme podobné mnohouhelníky *ABCDE* a *abcde*.

Z tohoto vyplýva, že *dva podobné mnohouhelníky možno priečnicami na podobné trojuhelníky rozložiť*, a naopak, *že z podobných trojuhelníkov možno podobné mnohouhelníky sostaviť.*

Poneváč u dvoch podobných štvor- a vôbec mnohouhelníkov rovnakležiace strany sú úmerné, preto *stoja ich obvody v tom po-*

mere jeden k druhému ako tieto. Ďalej poneváč dva podobné štvor- a vôbec mnouhelníky na podobné trojuhelníkv možno rozložiť, a poneváč štvorcové obsahy každých dvoch takýchto, t. j. rozložením povstalých trojuhelníkov, stoja v tom pomere jeden k druhému ako kvadráty ich rovnak ležiacich strán (viď § 29.) preto: *ich súčty, či štvorcové obsahy dvoch podobných štvor- a vôbec mnohouhelníkov, musia tiež v tom pomere, ako kvadráty rovnak ležiacich strán sa nachodiť.* Je-li tedy u dvoch podobných štvor- alebo viacuhelníkov jedna z rovnakležiacich strán 6 *m* a druhá 2 *m* dlhá, tenkráť stoja ich štvorcové obsahy tiež v tom pomere jeden k druhému ako $6^2 : 2^2$ či ako 36 : 4.

Úlohy 1. Nakresli dva podobné obdĺalníky dľa pomeru 4 : 2 a rozdeľ každý priečnicou na dva trojuhelníky!

Koľko párov podobných trojuhelníkov obdržíme v tomto prípade? *A dľa ktorého* prípadu podobnosti sú si podobné? *V akom* pomere stoja štvorcové obsahy oboch obdĺalníkov jeden k druhému? A obvody? Či ich priečnice sú úmerné?

2. Nakresli, v tom pomere strán ako 10 : 1, dva podobné lichobežníky a rozlož na podobné trojuhelníky!

Ktoré z obdržaných trojuhelníkov majú rovnaké uhly a úmerné strany? *Koľkokrát* je prvý z otáznych lichobežníkov väčší nežli druhý?

§ 35. O sostrojovaní podobných štvor-, päť-, a vôbec mnohouhelníkov, pomocou zmenšeného merťuchu.

Ako trojuhelníky, podobne možno pomocou zmenšeného merťuchu: i štvor-, päť- a vôbec mnohouhelníky zmenšeno napodobniť. Spôsob tohoto sostrojovania vysvetlíme v nasledujúcich príkladoch.

Príklad 1. Nejakého obdĺalníka *ABCD* (Obr. 67.) jedna strana je 20 *m* a druhá 45 *m* dlhá, sostroj pomocou zmenšeného merťuchu, druhý, jemu podobný *abcd* obdĺalník!

Rozl. Načiaram 20 *m* zodpovedajúcu prímku *ab* a u jej jedného konca na pr. u *b* sostrojím pravý uhol; z druhého ramena nakresleného uhlu odrežem 45 *m* zodpovedajúci kus *bc* a načiaram k obom ramenám rovnobežné.

Príklad 2. Nejakého kosodĺalníka *ABCD* jedna strana má 15 *m* a druhá susednia 24 *m* a nimi uzavretý uhol 105°; nakresli na základe zmenšeného omerťuchu druhý, jemu podobný *abcd* kosodĺalník.

Rozl. Nakreslím 15 *m* dlhej strane zodpovedajúcu prímku *ab* a u jej jednoho konca na pr. u *b* sostrojím 105° veľký uhol, potom odrežem z nakresleného ramena druhej či 24 *m* dlhej strane zodpovedajúci kus, a načiaram k obom ramenám rovnobežné.

Máme-li merací stolík, teda postavíme ho u jednoho z uhlov na pr. u B, a vyhľadáme jemu zodpovedajúci bod b na papieri, visirujeme z neho, cez kolčeky linonára (viď obr. 133(· v smere oboch jeho ramien, a načiarame hneď na mieste uhol uzavierajúce prímky. Na to odrežeme z nich 15 m a 24 m zodpovedajúce kusy ab a bc a k obom posledným načiarame rovnobežné.

Podobne sostrojujeme dľa zmenšeného merťuchu i kosoštvorec.

P r í k l a d 3. Nejakého štvoruhelníka $ABCD$ (viď obr. 135.) strana $AB = 40$ m, $BC = 54$ m; $\sphericalangle A = 70^0$, $\sphericalangle B = 84^0$ a $\sphericalangle C = 106^0$; sostroj druhý jemu podobný štvoruhelník $abcd$.

R o z l. Nakreslím strane AB či 40 m zodpovedajúcu prímku ab, u jej začiatočného bodu a nakreslím 70^0 a u jej konečného budu b 84^0 veľký uhol; zo slobodného ramena posledného uhlu odrežem strane BC či 54 m zodpovedajúci kus bc; u bodu c nakreslím 106^0 veľký uhol a predĺžim jeho rameno až dotiaľ, kým sa so slobodným ramenom prvého uhlu a nestykne.

Máme-li merací stolík, tedy postavíme ho najprv v uhle A, vyhľadáme pomocou vidlice jeho vrcholu zodpovedajúci bod a, na papieri; visirujeme z posledného v smere strany AD a v smere strany AB; načiarame hneď na mieste obom týmto stranám zodpovedajúce prímky ; z poslednej odrežeme 40 m zodpovedajúci kus ab. Na to prenesieme merací stolík do B, a postavíme tak, že bod b na papieri stojí práve nad skutočným bodom B a prímka ba leží v smere prímky BA; visirujeme C, načiarame v smere visirovanej čiary BC prímku, odrežeme z nej strane BC či 54 m zodpovedajúci kus bc. Konečne prenesieme merací stolík do C a postavíme tak, že bod c na papieri stojí nad skutočným bodom C, visirujeme a čiarame v smere CD. Týmto spôsobom obdržíme známemu či vykolkovanému štvoruhelníku $ABCD$ podobný štvoruhelník $abcd$.

Podobne sostrojujeme i k nejakému lichobežníku druhý, jemu podobný lichobežník.

K nejakému nepravidelnému štvoruhelníku (alebo i k nejakému lichobežníku) druhý, jemu podobný ešte i tak nakreslíme, jestli tamtoho, tri, jedna po druhej nasledujúce strany a medzi nimi ležiace dva uhly vymeriame a na hor udaný spôsob v tom istom poriadku na papier prenesieme.

(Na pr. str. AD, AB a BC a uhly A a B [viď obr. 135].

Ako štvoruhelníky, podobne možno pomocou zmenšeného merťuchu i podobné päť-, šesť-, a vôbec podobné mnohouhelníky sostrojiť. Najsamprv vymeriame a nakreslíme jednu zo strán, čo základnú, potom jej priležiaci uhol, na to nasledujúcu druhú stranu a nasledujúci druhý uhol atď. v tom poriadku v akom jedno po druhom nasledujú.

Leží-li odkresliť sa majúci mnohouhelník v úbočí a hľadáme-li len jeho plodonosnú plochu, tenkrát miesto skutočnej dĺžky vo vrchu ležiacich strán, vezmeme len ich vodorovné prômety (Viď obr. 22.) a uhly odkreslíme nalomeným linonárom (Obr. 134.) pri čom jeho kratšou do hora zdvihnutou časťou visirujeme na uhly označujúce drúčky a pozdlž dlhšej časti čiarame prímky, ktoréžto posledné predstavujú hneď i vodorovné prômety patričných strán otázneho mnohouhelníka.

Pravdaže toto posledné možno previesť len na meracom stolíku ktorý ako sme už riekli, vždy musí mať vodorovnú polohu.

K nejakému štvor-, päť-, a vôbec mnohouhelníku druhý, jemu podobný ešte i tak nakreslíme, jestli známy štvor-, päť- a vôbec mnohouhelník na trojuhelníky rozložíme a tieto, dľa už známeho spôsobu, jedno po druhom, zmenšeno na papieri nakreslíme.

§ 36. O vypočtovaní štvorcového obsahu: troj-, štvor-, a vôbec mnohouhelníkov pomocou zmenšeného merťuchu.

Na slobode vyznamenaných troj-, štvor-, päť-, a vôbec mnohouhelníkov štvorcové obsahy vymeriavame a vypočitúvame ako sme už podotkli pomocou zmenšeného merťuchu. Každý jeden vymerať sa majúci troj-, štvor-, päť- a vôbec mnohouhelník, nakreslíme prv dľa už známeho spôsobu (§ 35.) zmenšeno na papieri, dľa zmenšeného merťuchu. Štvor-, päť- a vôbec mnohouhelníky podelíme prv na trojuhelníky a každého trojuhelníka štvorcový obsah vyhľadáme o sebe. Toto posledné deje sa tým spôsobom, že jednu zo strán trojuhelníka vezmeme za základnú a z jej oprotného uhlu spustíme na ňu kolmú, ktorá predstavuje výšku. Ako základnú stranu tak i výšku, každú o sebe vezmeme do kružidla a vyhľadáme na zmenšenom merťuchu, dľa ktorého sme kreslili, koľko metrov jednej každej v skutočnosti zodpovedá. Polovica z násobku oboch týchto čísel, predstavuje štvorcový obsah otázneho trojuhelníka.

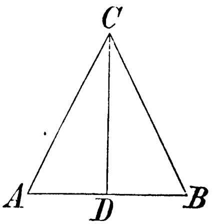
Sčítame-li štvorcové obsahy všetkých takto vymeraných trojuhelníkov dovedna, obdržíme celkovitý štvorcový obsah (viď obr. 105.) poťažného mnohouhelníka.

Tak na pr. zodpovedá-li na zmenšenom merťuchu základnej strane nejakého trojuhelníka 125 *m* a jeho výške 178·48 *m* tedy učiní jeho plocha 11156.15 m^2.

Alebo, otázny mnohouhelník, rozdelíme na lichobežníky a trojuhelníky a vyhľadáme na zmenšenom merťuchu ich základným stranám a výškam zodpovedajúce dĺžky a vypočtujeme ich štvorcové obsahy dľa už známeho spôsobu; týchto súčet dá celkovitý štovrcový obsah otázneho mnohouhelníka. (Viď obr. 106.)

§ 37. O delení troj- a štvoruhelníkov na rovné časti alebo dľa pomeru.

Rozdelíme-li u nejakého trojuhelníka ABC *(Obr. 137.)* základnú stranu AB na dve rovné časti a spojíme-li deliaci bod D s vrcholom uhlu C, rozpadne sa tenže na dva trojuhelníky: ADC a CDB. Oba tieto trojuhelníky majú rovnaké základné strany, $AD = DB$, a poneváč z vrcholového bodu C na základnu AB je len jedna kolmá možná, proto majú i rovnakú výšku. Keďže ale majú rovnaké základné strany a rovnakú výšku, tedy sú i ich štvorcové obsahy rovnaké či $\triangle\ ADC = \triangle\ CDB$.



Obr. 137.

Úlohy. 1. Nakresli rovnoramenný trojuhelník, a rozdeľ ho na dve rovné časti!

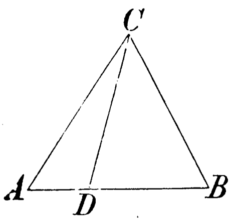
Aké trojuhelníky predstavujú obdržané polovice? *Čo* zkúsime, jestli otázne trojuhelníky rovnakležiacimi stranami a uhlami jeden na druhý položíme? *Na aké* trojuhelníky delí výška rovnoramenný trojuhelník? Oprobuj, či výška i rovnostranný trojuhelník delí na dva pravouhelné trojuhelníky?

2. Nakresli ľubovoľný ostrouhelný trojuhelník a rozdeľ ho na tri! na štyri! na päť rovných čiastok!

Rozl. Rozdelím základnú stranu na tri (poťažne na štyri alebo päť rovnakých čiastok) a spojím deliace body s vrcholom oproti základnej strane ležiaceho uhlu.

Prečo sú obdržané trojuhelníky rovnaké v každom z týchto prípadov? *Ktoré* trojuhelníky majú rovnaký štvorcový obsah?

Rozdelíme-li nejakého trojuhelníka ABC *(Obr. 138.)* základnú stranu AB na tri rovné časti a spojíme-li len prvý deliaci bod D s vrcholom uhlu C, tedy rozpadne sa na dva nerovné trojuhelníky ADC a CDB. Poneváč posledný či CDB má dvakrát väčšiu základnú stranu, než prvý, preto je i jeho štvorcový obsah dvakrát väčší. Štvorcový obsah $\triangle\ ADC$ stojí k štvorcovému obsahu $\triangle\ CDB$ v tom pomere, ako $1 : 2$.



Obr. 138.

Úlohy. 1. Nakresli ľubovoľný trojuhelník ABC a rozdeľ ho na tri časti, ktoré stoja v tom pomere jedna k druhej, ako $1 : 2 : 3$!

Rozl. Rozdelím základnú stranu na $1 + 2 + 3$ či na 6 rovných čiastok a spojím prvý a tretí deliaci bod s vrcholom oproti základnej strane ležiaceho uhlu.

Prečo je druhá časť dvakrát a tretia trikrát väčšia, než prvá?

2. Nakresli nejaký trojuhelník *ABC* a k nemu druhý dvakrát toľký a tretí trikrát toľký!

R o z l. Predĺžim známeho či prvého trojuhelníka základnú stranu, označím na nej najprv dvakrát toľký a potom trikrát toľký kus, ako je prvého základná strana a spojím týchto konečné body s vrcholom prvého trojuhelníka.

Prečo je druhý z nakreslených trojuhelníkov dvakrát väčší, než prvý? a tretí trikrát väčší než prvý? *V akom* pomere stoja jeden k druhému ich štvorcové obsahy? a ich základné strany?

3. Nakresli tri toho istého alebo i rozdielneho druhu trojuhelníky, ichžto základné strany majú po 5 *cm* a výška prvého činí 2 *cm*, druhého 4 *cm* a tretieho 6 *cm!*

Koľký je štvorcový obsah prvého? druhého? a tretieho z týchto trojuhelníkov? *Koľkokrát* je výška druhého väčšia, nežli prvého a tretieho, nežli prvého? *Koľkokrát* je štvorcový obsah druhého väčší, nežli prvého? a tretieho nežli prvého? V akom pomere stoja ich štvorcové obsahy? a ich výšky? (Ako 1 : 2 : 3.)

Z tohoto vysvitá, *že štvorcové obsahy dvoch alebo viac rovnakú výšku majúcich trojuhelníkov stoja v tom pomere jeden k druhému, ako ich základné strany, a štvorcové obsahy dvoch alebo viac, rovnakú základnú stranu majúcich trojuhelníkov, stoja v tom pomere jeden k druhému, ako ich výšky.*

Spojíme-li u obdĺžnika, štvorca, kosoštvorca a kosoďalníka dva protistojné uhly, týchto vrcholy prímkou (priečnicou), rozpadne sa každý z nich na dva trojuhelníky, ktoré, ako už známe (Viď § 20.), sú rovnaké.

Tu spomenuté rovnobežníky i tak ešte rozpoltíme, jestli dve protistojné strany na dve rovné časti rozdelíme a obdržané deliace body prímkami spojíme.

Rozdelíme-li dve oprotné strany u horspomenutých rovnobežníkov na: tri, štyri alebo päť rovných čiastok a spojíme-li oprotné deliace body prímkami, rozpadne sa každý z nich na: tri, štyri alebo päť rovných čiastok, dľa toho, na koľko rovných čiastok sme oprotné strany rozdelili.

Podobne, ako rovnobežníky, možno i rovnostranný lichobežník na dve, tri, štyri alebo viac rovných čiastok rozdeliť. Toto docielime, jestli každú z jeho rovnobežných strán na dve, poťažne na tri, štyri alebo viac rovných čiastok rozdelíme a deliace body prímkami jeden s druhým spojíme.

Ú l o h y. 1. Rozdeľ *každú* stranu nejakého štvorca na dve rovné časti a spoj oprotné deliace body prímkami!

Aké obrázce predstavujú obdržané čiastky? *Na koľko* štvorcov rozpadnul sa celý štvorec? (2 × 2) Prečo sú tieto štvorce rovnaké?

2. Rozdeľ každú stranu nejakého kosoštvorca na tri rovné časti a spoj oprotné deliace body prímkami!

Aké obrázce či figury predstavujú obdržané čiastky? *Na koľko* kosoštvorcov rozpadnul sa celý? (3 $\times$ 3.) *Prečo* sú tieto kosoštvorce rovnaké?

Aké obrázce či figury obdržíme, jestli podobne, ako u štvorca a kosoštvorca i u kosoďalníka a obďalníka každú stranu na rovný počet na pr. dve, tri, štyri alebo päť rovných čiastok rozdelíme a oprotné deliace body prímkami spojíme? Kosoďalníka čiastky budú v tomto prípade kosoďalníky, a obďalníka obďalníky.

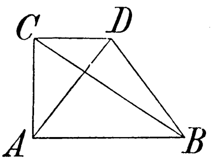
Ako rozdelíme štvorec na 100 rovných štvorcov? alebo obďalník na 100 rovných obďalníkov? atď. *Na koľko* rovných čiastok musíme v tomto prípade každú ich stranu rozdeliť? (Na 10.)

Aké štvorce obdržíme, jestli každú stranu štvorcového metra na 100 rovných čiastok rozdelíme a oprotné deliace body prímkami spojíme? (cm^2.)

§ 38. O premieňaní obrázcov čili figúr.

Nakreslíme-li miesto nejakého trojuhelníka s ním rovnaký štvorcový obsah majúci štvoruhelník, tenkráť sme ho premenili. Ako trojuhelník, podobne možno i ostatné obrázce jedny na druhé s nimi rovnoveľké premeniť. Spôsob tohoto premieňania znázorníme na nasledujúcich úlohách.

Úloha. 1. Miesto nejakého ostrouhelného trojuhelníka na pr. $\triangle$ *ABD* (*Obr. 139.*) nakresli s ním rovnoveľký pravouhelný trojuhelník!



Obr. 139.

Rozl. Poneváč trojuhelníky, ktoré majú rovnakú základnú stranu a rovnakú výšku, sú, čo do štvorcového obsahu, rovnaké, preto u konca základnej *AB* v bode *A* postavím kolmú a cez bod *D* načiaram k základnej rovnobežnú *DC*; bod *C*, v ktorom sa tieto dve čiary režú, spojím s *B*. Pravouhelný trojuhelník *ABC* má s trojuhelníkom *ABD* rovnakú základnú stranu a rovnakú výšku a preto $\triangle ABC = \triangle ABD$.

Týmto spôsobom možno akýkoľvek trojuhelník na pravouhelný premeniť.

Dľa tohoto štvorcový obsah nejakého na papieri nakresleného trojuhelníka i tak vypočítame, jestli tenže prv na pravouhelný premeníme a tento vypočítame; jedna z katét u posledného predstavuje základnú stranu a druhá výšku.

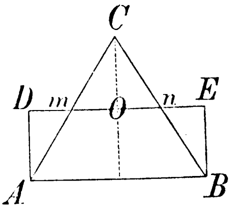
Ako premeníme nerovnostranný trojuhelník na rovnoramenný?

2. Nejaký trojuhelník na pr. *ABC* premeň na druhý, taký, u nehož jeden z uhlov má 45°. (*Obr. 139.*)

Rozl. U bodu *A* základnej strany *AB* načiaram 45° veľký uhol *DAB*, a cez bod *C* načiaram ku základnej rovnobežnú, ktorá.

slobodné rameno otázneho uhlu reže v bode D, a spojím D s B $\triangle\ ACB = \triangle\ DAB$ a jeho uhol $DAB = 45^{\circ}$.

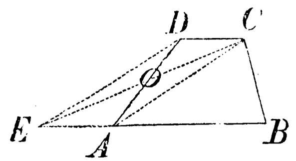
3. Nejaký trojuhelník ABC premeň na obdĺalník tej istej veľkosti! (*Obr. 140.*)



Obr. 140.

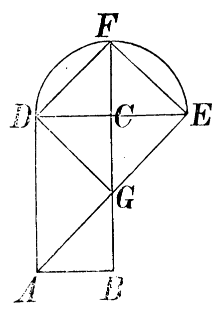
Rozl. U oboch koncov základnej AB postavím kolmé a poltím obe jeho strany AC a BC a cez poltiace body načiaram k základnej rovnobežnú, ktorá tamtie kolmé reže v bodoch D a E. $\triangle\ ABC = ABED$, o čom sa presvedčíme, jestli z vrcholu C kolmú na AB spustíme a nad čiarou DE povstalé dva trojuhelníky COm a COn s trojuhelníkmi ABm a EPn porovnáme. Všetky štyri sú rovnaké. Vystrihni ich z papieru a polož jeden na druhý!

4. Nejaký štvoruhelník, na pr. $ABCD$, premeň na trojuhelník tej istej veľkosti! (*Obr. 141.*)



Obr. 141.

Rozl. Spojím dva oprotné uhly na pr. A s C, načiaram cez D k načiaranej AC rovnobežnú, ktorá predĺženú základnú reže v E, a spojím bod E s C. $\triangle\ EBC = ABCD$. Prečo? Odp. $\triangle\ EDC = \triangle\ EDA$, bo oba majú rovnakú základnú stranu ED a rovnakú výšku. Odnímeme-li z oboch $\triangle\ EOD$, zvýši $\triangle\ DOC = \triangle\ EOA$. Známy či pôvodný štvoruhelník $ABCD$ pozostáva zo štvoruhelníka $ABCO$ a $\triangle\ DOC$; povstalý trojuhelník EBC ale z toho istého štvoruhelníka $ABCO$ a $\triangle\ AOE$. Pridáme-li k $ABCO$ $\triangle\ DOC$, obdržíme štvoruhelník $ABCD$; pridáme-li k $ABCO$ $\triangle\ AOE$, obdržíme $\triangle\ EBC$. Poneváč $\triangle\ DOC = \triangle\ AOE$, preto i $ABCO + AOE = ABCO + \triangle\ DOC$ či $ABCD = \triangle\ EBC$.



Obr. 142.

Týmto spôsobom, vezmúc jednu zo strán za základnú, možno postupne nejaký mnohouhelník, na pr. šesťuhelník, premeniť na päťuhelník; z päťuhelníka možno urobiť zas štvoruhelník a zo štvoruhelníka trojuhelník.

Dľa tohoto nejakého zmenšeno na papieri nakresleného viacuhelníka, na pr. šesťuhelníka štvorcový obsah ešte i tak najdeme, jestli ho postupne prv na päťuhelník, tento na štvoruhelník a posledný na trojuhelník premeníme a tento potom vypočítame.

5. Nejaký obdĺalník $ABCD$ premeň na štvorec! (*Obr. 142.*)

Rozl. Kratšiu stranu obdĺalníka či DC predĺžim natoľko, že sa bude rovnať dlhšej jeho strane AD či že $DE = AD$. Potom poltím DE a obdržanou polovicou opíšem nad DE polokruh, predĺžim BC až po F či po obluk. Spojím D s F a k tejto čiare či k DF načiaram počnúc od A rovnobežnú AE, spustím na túto poslednú ako z D tak i z F kolmé DG a FE. Štvorec $DGEF$ je $=$ obď. $ABCD$. Bo trojuhelník DGC je obom spoločný, $\triangle$ AGD je ale toľký, ako $\triangle$ GEF a $\triangle$ ABG toľký, ako $\triangle$ DCF, o čom sa snadno presvedčíme, jestli ich z papieru vystrihneme a jeden na druhý položíme.

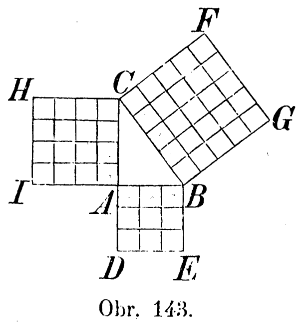
Spôsob premieňania štvorcov na kosoštvorce a naopak, kosoštvorcov na štvorce; potom, obďalníkov na kosoďalníky a kosoďalníkov na obďalníky, ako i lichobežníkov na trojuhelníky znázorňujú v § 21. obsažené obrázce.

§ 39. O Pythágorovej poučke.

Nakreslíme-li pravouhelný trojuhelník s katétami 3 *cm* a 4 *cm* veľkými, zkúsime, že v tomto páde jeho hypotenúsa je 5 *cm* dlhá. Je-li na pr. (*Obr. 143.*) $AB = 3$ *cm*, $AC = 4$ *cm*, tedy je $BC = 5$ *cm*. Vezmeme-li teraz kvadraty týchto čísel (Viď § 23. úlohy) či 3^2, 4^2, 5^2 alebo 9, 16, 25, tedy najdeme, že súčet prvých dvoch kvadrátnych čísel, či 9 a 16, rovná sa tretiemu kvadrátnemu číslu či 25; či t. j. že $3^2 + 4^2 = 5^2$ alebo $9 + 16 = 25$.

V tom istom súvise, ako kvadrátne čísla z oboch katét a hypotenúsy, stoja i nad katétami a hypotenúsou sostrojených meríckých kvadrátov plochy.

Nakreslíme-li nad katétami AB a CA a hypotenúsou BC otázneho trojuhelníka ABC kvadráty: $ABED$, $ACHI$ a $BCFG$ a rozdelíme-li každý jeden na *cm*²-tre, zkúsime, že prvý bude takových 9, druhý 16 a tretí 25 v sebe obsahovať, z čoho zas vyplýva: že oba nad katétami sostrojené kvadráty $ABED$ a $ACHI$ majú dovedna toľko *cm*²-ov, koľko ich má nad hypotenúsou sostrojený kvadrát $BCFG$. Tamtie dva prvé rovnajú sa tedy, čo do štvorcového obsahu, tomuto poslednému, bo $9\ cm^2 + 16\ cm^2 = 25\ cm^2$.



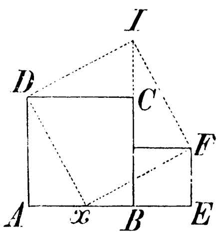
Obr. 143.

Zo všetkého tu povedaného ale vyplýva, že u otázneho trojuhelníka nielen katétam a hypotenúse zodpovedajúce kvadrátne čísla lež i nad katétami a hypotenúsou sostrojených kvadrátov plochy stoja v tom súvise, že *súčet oboch nad katétami sa nalezajúcich kvadrátov rovná sa kvadrátu nad hypotenúsou.*

Túto poučku vynašiel chýrečný mudrc Pythágoras, a preto menuje sa *Pythagorovou* poučkou.

Že táto poučka je i vtedy platná, keď otázneho pravouhelného trojuhelníka strany majú iné, ľubovolné rozmery, o tom možno sa ešte i nasledovne presvedčiť.

Sostrojme obom katétam nejakého pravouhelného trojuhelníka zodpovedajúce kvadráty a nakreslime alebo postavme ich jedno ku druhému tak, ako to obr. 144. znázorňuje. Dajme tomu, že $ABCD$ predstavuje kvadrát jednej katéty, a $BEFG$ zas kvadrát druhej katéty otázneho pravouhelného trojuhelníka. (Litera G na obrázci chybuje.) Vezmeme-li do kružidla stranu menšieho kvadrátu BE a odrežeme-li toľký kus zo strany väčšieho kvadrátu či z AB, počnúc od A, tak že $Ax = BE$ a spojíme-li x s D a F, obdržíme dva trojuhelníky, a síce DAx a FEx. Vyrežeme-li oba tieto trojuhelníky z papieru a dáme-li trojuhelníku FEx tú polohu, akú má $\triangle IGF$, a trojuhelníku DAx zas tú, akú má $\triangle DCI$, obdržíme kvadrát $DxFI$, ktorý zodpovedá kvadrátu nad hypotenúsou otázneho pravouhelného trojuhelníka. Posledný kvadrát je, ako to obrázec znázorňuje, toľký, ako oba kvadráty nad oboma katétami dovedna či $DxFI = ABCD + BEFG$.



Obr 144.

Úlohy. 1. Nejakého štvorca strana je 5 cm a druhého 8 cm dlhá; sostroj štvorec či kvadrát, ktorý rovná sa ich súčtu, či ktorý má toľkú plochu, ako tamtie dva dovedna!

Rozl. Sostrojím pravouhelný trojuhelník s katétami 5 cm a 8 cm dlhými a nad hytenúsou štvorec so stranami jej dĺžke zodpovedajúcimi. Posledný kvadrát je toľký, ako tamtie prvé dva dovedna.

2. Nejakého štvorca strana je 7 cm a druhého 4 cm dlhá, sostroj štvorec, ktorý rovná sa rozdielu z oboch!

Rozl. Nakreslím pravouhelný ťrojuhelník, ktorého jedna katéta je 4 cm a hypotenúsa 7 cm, a nad druhou katétou sostrojím štvorec. Posledný štvorec rovná sa rozdielu z oboch známych štvorcov.

Označíme-li dĺžku hypotenúsy literou c a dĺžky oboch katét literami a a b, tedy je, ako sme to vyššie vynašli, $c^2 = a^2 + b^2$. Známe-li dĺžku katéty a a dĺžku katéty b, a sčítame-li im zodpovedajúce kvadrátne čísla či a^2 a b^2 dovedna, tedy tento súčet rovná sa kvadrátnemu číslu z hypotenúsy. $c^2 = a^2 + b^2$.

Tak na pr. je-li $a = 2\ m$, $b = 4\ m$, tedy je $c^2 = 2^2 + 4^2$ či $c^2 = 4 + 16$ alebo $c^2 = 20$. A ponevác $c^2 = 20$, tak je $c = \sqrt{20}$, bo kvadrátny koreň z c^2 je c, a z 20 je $\sqrt{20}$ t. j. *dĺžku hypotenúsy c najdeme, jestli z 20 kvadrátny koreň vyhľadáme*, či 20 na dva rovné činitele rozložíme. Probovaním najdeme, že $\sqrt{20}$ je 4.45 m. (Viď § 26, Úlohy.)

Dľa toho dĺžka hypotenúsy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Odčítame-li z c^2 či z kvadrátneho, hypotenúse zodpovedajúceho čísla kvadrátne číslo jednej katéty, na pr. a^2, obdržíme kvadrátne číslo druhej katéty, či $c^2 - a^2 = b^2$ a naopak, $b^2 = c^2 - a^2$.

Tak na pr. je-li $c = 8\ m$ a $a = 5\ m$, tak $b^2 = 8^2 - 5^2$ či $b^2 = 64 - 25$ alebo $b^2 = 39$. A poneváč $b^2 = 39$, tak $b = \sqrt{39} = 6.24\ m$.

Dľa tohoto dĺžka niektorej katéty, na pr. katéty $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ a dĺžka katéty $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Pythágorova poučka poskytuje tedy spôsob, zo dvoch strán nejakého pravouhelného trojuhelníka tretiu vyhľadať.

Úlohy. 1. Koľký rebrík potrebujeme k 6 m vysokej streche, jestli podnožie rebríka je od steny 4 m ďaleko?

Rozl. Poneváč stena, rebrík a dialka podnožia od steny tvoria pravouhelný trojuhelník, ktorého hypotenúsu predstavuje rebrík, preto je $c = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 7.2\ m$.

2. Koľké rohy treba na 12 m široký a 5 m vysoký dach?

Rozl. Rohy a šírka dachu tvoria rovnoramenný trojuhelník, ktorý delí výšku na dva pravouhelné trojuhelníky. V každom z týchto trojuhelníkov jedna z katét je výška, druhá katéta je polovica z dachovej šírky a hypotenúsa jeden z rohov. A preto $c = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} = 7.79\ m$.

3. Nejakého štvorca strana je 4 m dlhá; koľká je jeho priečnica?

Rozl. $c = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5.6\ m$.

4. Vyhľadaj štvorcový obsah nejakého rovnoramenného trojuhelníka, jehož základná strana má 2 m a jedno z ramien 3 m!

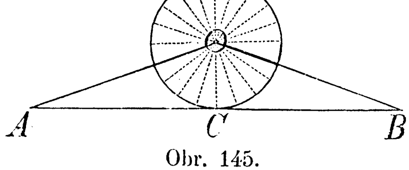
Rozl. Spustíme-li z vrcholu otázneho trojuhelníka kolmú či výšku, rozpadne sa tenže na dva pravouhelné trojuhelníky, a základná strana na dve polovice. A preto je jeho výška $= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3.16$.

Štvorcový obsah $= 1 \times 3.16 = 3.16\ m^2$.

§ 40. O vymeriavaní kruhovej plochy, kruhového výseku a odseku a elliptičnej plochy čili ellipsy.

a) *Kruhovej plochy.*

Kružnicou uzavretú plochu menujeme kruhovou plochou či kruhoplochou. Túto vymeriame, jestli celý kruh na rovnaké trojuhelníky, ktorých vrcholy v stredu kruhu nachodia sa, podelíme, a týchto plochy dovedna sčítame. (*Obr. 145.*) Chceme-li túto úlohu dôkladne previesť, musíme celý kruh na nekonečne veľký počet trojuhelníkov rozdeliť, bo len v tomto prípade budú ich základné strany takmer



Obr. 145.

prímky, a ich výšky toľké, ako polmery. Obnáša-li základná strana u jednoho z týchto nepočetne malých trojuhelníkov na pr. z metrov, tedy je jeho štvorcový obsah $= \frac{z \times r}{2}$; dvoch takýchto trojuhelníkov štvorcový obsah bude dvakrát toľký či $\frac{2 \times z \times r}{2}$ či $2\,z \times \frac{r}{2}$; troch trikrát toľký či $3\,z \times \frac{r}{2}$; štyroch štyrikrát toľký či $4\,z \times \frac{r}{2}$ atď. Poneváč ale základné plochy všetkých trojuhelníkov rovnajú sa celej kružnici a poneváč obvod celej kružnice je $2\,r\pi$, preto štvorcový obsah všetkých týchto trojuhelníkov musí $2\,r\pi \times \frac{r}{2}$ veľký byť.

Z tohoto vyplýva, že *štvorcový obsah kruhovej plochy nájdeme, jestli $2r\pi$ či obvod kruhu, polovicou polmera či $\frac{r}{2}$-ou násobíme.* Tak na pr. má-li obvod nejakého kruhu 25·12 *m* a polmer 4 *m*, tedy je jeho štvorcový obsah 25·12 $\times$ 2 či 50·24 m^2.

Štvorcový obsah kruhu $=$ obvod $\times \frac{r}{2} = 2r\pi \times \frac{r}{2}$.

Keďže ale $2r\pi$ značí celý obvod, tak $r\pi$ značí polobvod kruhu. Poneváč celý obvod násobili sme polovicou polmeru, preto polobvod, či dvakrát menšie číslo musíme celým polmerom násobiť, chceme-li štvorcový obsah nejakého kruhu vypočítať. Z toho vyplýva zas, *že štvorcový obsah kruhu ešte i tak najdeme, jestli polobvod celým polmerom násobíme.*

Štvorcový obsah kruhu $=$ polobvod $\times$ polmer $= r\pi \times r$.
Tak na pr. má-li polobvod nejakého kruhu 9·42 *m* a polmer 3 *m*, tedy je jeho štvorcový obsah $=$ 9·42 $\times$ 3 $=$ 28·26 m^2.

Poslednú formulku či $r\pi.\,r$, možno i takto označiť: $r \times r \times \pi$, bo činitele slobodno premiestiť. Mathematici označujú $r \times r \times \pi$ na krátce takto: $r^2\pi$. (miesto $r \times r$ píšu totiž r^2 či r na druhej mocnine).

Formulka $r \times r \times \pi$ či $r^2\pi$ hovorí, že *štvorcový obsah kruhu ešte i tak najdeme, jestli polmer či r samým sebou, a obdržaný násobok potom ešte číslom π či 3·14-mi násobíme.*

Tak na pr. má-li polmer nejakého kruhu 2 *dm*, tedy je jeho štvorcový obsah 2 $\times$ 2 $\times$ 3·14 či 12·56 dm^2.

Štvorcový obsah kruhu $=$ polmer $\times$ polmer $\times$ 3·14
či $r \times r \times \pi$ alebo $r^2\pi$.

Úlohy. 1. Nejaké dno na sude, kruhovej podoby, má 28 *cm* veľký priemer; koľká je jeho plocha?

Rozl. Poneváč je priemer 28 *cm*, tedy je polmer 14 *cm*, a celá jeho plocha 14 $\times$ 14 $\times$ 3·14 či 615·44 cm^2.

2. Nejaký strom má v obvode 140 *cm*, koľká je na tomže mieste jeho priesečná plocha? (t. j. tá plocha, ktorú obdržíme, jestli ho na tomže mieste prepílime.)

Rozl. Najsamprv vyhľadáme jeho priemer. Ponevač v obvode má 140 *cm*, tedy je jeho priemer 140 : 3·14 či 44·58 *cm*, polmer 22·29 *cm*; priesečná plocha 22·29 $\times$ 22·29 $\times$ 3·14 či 496·84 cm^2.

3. Koľko 5 *m* dlhých a 3 *dm* širokých dosák treba k shotoveniu nejakého kruhovitého a v priemere 2·4 *m* majúceho vrchnáka?

Rozl. Najsamprv vypočítame plochu celého vrchnáka; táto má 1·2 $\times$ 1·2 $\times$ 3·14 či 4·52m^2. A ponevač plocha jednej dosky je 5 $\times$ 0·3 či 1·5 m^2 veľká, tedy toľko dosák treba naň, koľkokráť 1·5 v 4·52 nachodí sa. A ponevač 1·5 v 4·52 nachodí sa 3.01-kráť, tedy treba niečo vyše troch dosák.

Ponevač štvorcový obsah či plocha kruhu je $r^2\pi$ alebo naopak, ponevač $3·14 \times r^2$ = štvr. obsah kruhu, preto $r^2 = \frac{\text{štv. obs.}}{3·14}$ a $r = \sqrt{\frac{\text{št. ob.}}{3.14}}$

Z tohoto vyplýva, že *polmer nejakého kruhu z jeho štvorcového obsahu vypočítame, jestli tento posledný 3.14-mi rozdelíme a z tohoto podielu kvadrátny koreň vyhľadáme.*

Má-li na pr. štvor. obsah nejakého kruhu 100 dm^2, vtedy jemu zodpovedajúci polmer či $r = \sqrt{\frac{100}{3·14}} = \sqrt{31·84} = 5·6$ *dm*. (Viď § 23. úlohy).

Označíme-li polmer nejakého väčšieho kruhu literou R a druhého menšieho literou r, tedy je prvého štv. obsah $= R^2\pi$ a druhého $= r^2\pi$.

Srovnáme-li oboch týchto kruhov štvorcové obsahy jeden s druhým, najdeme, že $ŠO : šo = R^2\pi : r^2\pi$ alebo skráteno $ŠO : šo = R^2 : r^2$ t. j. štvorcové obsahy *dvoch kruhov stoja v tom pomere jeden k druhému, ako kvadráty z ich polmerov*, či ako kvadráty polmerom zodpovedajúcich čísel.

Má-li tedy polmer nejakého kruhu 3 *dm* a druhého 1 *dm*, tedy stoja ich štvorcové obsahy v tom pomere jeden k druhému ako $3^2 : 1^2$ či $9 : 1$ t. j. prvšieho kruhu štvorcový obsah je 9-kráť väčší než posledného.

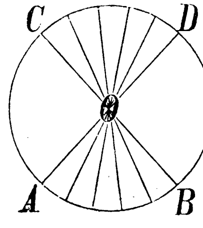
Úlohy. 1. Nejakého kruhu polmer má 8 *dm* a druhého 4 *dm*; koľkokráť je tamtoho plocha väčšia nežli tohoto? Odp. Toľkokráť, koľkokráť 4^2 v 8^2 či 16 v 64 nachodí sa. (4-kráť).

2. Koľký polmer zodpovedá 20 m^2 veľkému kruhu?

Odp. $r = \sqrt{\frac{20}{3.14}} = \sqrt{6·36} = 2.52$ *m*.

b) *Vypočítanie štvorc. obsahu kruhového výseku.*

Spojíme-li v nejakom kruhu stredobod O s dvoma bodami kružnice na pr. stredobod O s A a B (*Obr. 146.*) polmerami, OA a OB, obdržíme takzvaný ***kruhový výsek*** AOB. Dľa tohoto je kruhový výsek dvoma polmery (na pr. AO a OB) a medzi týmito nalezajúcim sa oblukom (na pr. AB) uzavretá čiastka kruhu. Otázne dva polmery uzavierajú medzi sebou stredový uhol AOB. Poneváč tento má práve toľko uhlových stupňov, koľko jemu zodpovedajúci obluk AB oblukových, preto ***rovnakým stredovým uhlom zodpovedajú rovnaké obluky a rovnakým oblukom zodpovedajú i rovnaké stredové uhly*** v jednom a tom istom alebo tým istým polmerom opísanom kruhu. Je-li tedy obluk (*Obr. 146*) $AB = CD$, tedy je i $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$.



Obr. 146.

Keďže ale rovnakým oblukom (v jednom a tom istom kruhu) zodpovedajú rovnaké stredové uhly, tak dvakrát väčšiemu obluku zodpovedá dvakrát väčší stredový uhol a naopak. Podobne, trikrát väčšiemu obluku zodpovedá trikrát väčší stredový uhol a naopak, v jednom a tom istom alebo tým istým polmerom opísanom kruhu atď.

Položíme-li kruhové výseky AOB a COD, ktorých obluky AB a CD a preto i stredové uhly AOB a COD sú rovnaké, jeden na druhý, zkúsime, že sa cele kryjú, či že majú rovnaký štvorcový obsah. Toto isté zkúsime, jestli dva iné k jednomu a tomu istému kruhu patriace výseky, ichžto stredové uhly alebo obluky sú rovnaké, jeden na druhý položíme. Z tohoto vyplýva, že ***kruhové výseky, ichžto obluky alebo stredové uhly su rovnaké, majú rovnaký štvorcový obsah***, jestli tiež v jednom a tom istom alebo vo dvoch avšak jedným a tým istým polmerom opísaných kruhoch nachodia sa. Podobne, že zo dvoch, v jednom a tom istom kruhu nalezajúcich sa kruhových výsekov, je ten dvakrát väčší, ktorému dvakrát väčší uhol alebo dvakrát väčší obluk zodpovedá a naopak.

Rozdelíme-li celý ***stredový uhol*** u nejakého kruhu, priemerami, jeden na druhom kolmo postavenými, na ***štyri rovné*** časti: rozpadne sa i celá ***kruhoplocha*** na štyri ***rovnaké kruhové výseky*** a celá ***kružnica na štyri rovnaké obluky.***

Rozdelíme-li, ako prvej, celý stredový uhol nejakého kruhu na osem rovných čiastok; rozpadne sa i celá kruhoplocha na osem rovnakých kruhových výsekov a celá kružnica na osem rovnakých oblukov.

Tomuto podobné zkúsime, jestli celý stredový uhol i na iný počet rovnakých čiastok rozdelíme.

Vôbec koľká časť je nejakého výseku stredový uhol z $360°$, toľká časť je jeho štvorcový obsah z celej kruhoplochy.

Z tohoto vyplýva, že ***štvorcový obsah nejakého kruhového výseku najdeme, jestli z celej kruhoplochy toľkú časť vezmeme*** *koľkokráť stredový uhol výseku v celom stredovom uhle či v 360° nachodí sa.*

Štvorcový obsah výseku = kruhoplocha: (360° : uhol výseku). Označíme-li uhol výseku znakom: a^0 a kruhoplochu s $r^2\pi$, tedy je:

Štvorcový obsah výseku $= r^2\pi : \frac{360^0}{a^0}$. A poneváč $r^2\pi : \frac{360^0}{a^0} = r^2\pi \times \frac{a^0}{360^0}$ preto štvorcový obsah výseku $= r^2\pi \times \frac{a^0}{360^0}$ t. j. štvorcový obsah nejakého výseku najdeme, *jestli celú kruhoplochu s uhlom výseku násobíme a tento násobok 360°-mi rozdelíme,* pričom dokladáme, že ako a^0, tak i 360° musejú vždy byť rovnomenné, t. j. jestli a^0 obsahuje v sebe i alebo len minúty, musejú ako a^0 tak i 360° v minútach byť vyslovené.

Úlohy. 1. Jestli polmer nejakého kruhu má 2 *m* a uhol v ňom obsaženého výseku má 5°, koľký je posledného štvorcový obsah?

Rozl. Najprv vypočítame štvorcový obsah celej kruhoplochy. Táto má 2 × 2 × 3·14 či 12·56 m^2. Teraz vyhľadáme, koľkokráť 5° v 360° sú obsažené. Poneváč 5 v 360 nachodí sa 72-kráť, preto má otázneho výseku plocha 12·56 : 72 = 0·174 m^2 alebo $12{\cdot}56 \times \frac{5}{360} = 0{\cdot}174\ m^2$.

Ako povstane kruhový výsek? *Ktoré* čiary tvoria jeho hranice? *Koľko* kruhových výsekov obdržíme, jestli celý stredový uhol kruhu na 10 rovných čiastok rozdelíme? *Aké* sú čo do veľkosti obdržané kruhové výseky? *Ktoré* výseky sú v jednom a tom istom kruhu rovnaké? *Ktorý* z dvoch nerovnakých, no v jednom a tom istom kruhu nalezajúcich sa výsekov, je väčší a ktorý menší? *Od čoho* závisí veľkosť nejakého kruhového výseku, v jednom a tom istom kruhu?

2. Nejakého kruhového výseku stredový uhol má 60° a polmer kruhu 3 *dm*; koľko obnáša tamtoho štvorcový obsah?

Rozl. Celá kruhoplocha má 3 × 3 × 3·14 dm^2 = 28·26 dm^2 a otázny kruhový výsek $28{\cdot}26 \times \frac{60}{360} = 4{\cdot}71\ dm^2$. Prečo toľko?

Koľko štvor. *dm* má u toho istého kruhu 30° majúci kruhový výsek? *Koľkokráť* menej než predešlý? *Prečo* dvakráť menej?

Rozdelíme-li (v mysli) výsek *AOB* počnúc od stredobodu *O* na nekonečne mnoho takových rovnakých trojuhelníkov, ichžto základné strany sú takmer prímky, bude jedneho z týchto trojuhelníkov štvorcový obsah = zákl. str. $\times \frac{\text{výška}}{2}$, a poneváč táto posledná je toľká, ako polmer, tedy $z \times \frac{r}{2}$; dvoch dvakráť toľko, či $2\,z \times \frac{r}{2}$; troch trikráť toľko či $3\,z \times \frac{r}{2}$ atď. Všetkých $O \times \frac{r}{2}$ či obluk $\times \frac{r}{2}$ ·bo všetkých základné strany činia dovedna toľko, koľko celý obluk.

Z tohoto avšak vyplýva, že *štvorcový obsah kruhového výseku i tak najdeme, jestli dĺžku jemu zodpovedajúceho obluku polmerom násobíme a z tohoto násobku polovicu vezmeme či nakrátce:*

$$\text{Štvor. obsah výseku} = \frac{\text{obl.} \times \text{polmer}}{2} \text{ alebo } \frac{o \times r}{2} \text{ alebo } o \times \frac{r}{2}$$

Úlohy. 1. Jestli dĺžka obluku u nejakého kruhového výseku má 21 *cm* a polmer jemu zodpovedajúceho kruhu 20 *cm*, koľký je jeho štvorcový obsah?

Rozl. Poneváč obluk je 21 *cm* a polmer 20 *cm*, tedy je jeho štvorcový obsah 21 × 10 či 210 cm^2.

Známe-li nejakého výseku obluk t. j. tohoto dĺžku, tak zodpovedajúci mu *stredový uhol najdeme, jestli celú kružnicu otáznym oblukom t. j. jeho dĺžkou rozdelíme a koľký je obdržaný podiel, toľkú časť z 360° vezmeme.*

$$\text{Stred. uhol} = 360^\circ : \frac{2r\pi}{o}.$$

Tak na pr. v poslednom príklade 21 *cm* dlhému obluku zodpovedajúci stredový uhol najdeme, jestli celú kružnicu či 2 × 20 × 3·14 či 125·60 číslom 21 rozdelíme a obdržanému podielu či 5·98-im zodpovedajúcu časť z 360° vezmeme. Poneváč 360 : 5·98 či 36000 : 598 = 60·2° tedy, má otázny uhol 60° 12′.

A naopak, známe-li stredový uhol nejakého výseku, tak jemu zodpovedajúci obluk, tohoto dĺžku najdeme, jestli 360° či celý stredový uhol kruhu uhlom výseku rozdelíme a koľký je obdržaný podiel, toľkú časť z celej kružnice vezmeme.

$$\text{Obluk} = 2r\pi : \frac{360^\circ}{a^\circ}.$$

Tak na pr. má-li nejakého kruhu polmer 2 *m* a uhol výseku 60°, tedy jemu zodpovedajúci *obluk*, tohoto dĺžku najdeme, jestli celý stredový uhol kruhu či 360°, uhlom výseku či 60°-mi rozdelíme a obdržanému podielu zodpovedajúcu t. j. 6-tu časť z celej kružnice t. j. z 2 × 2 × 3·14 či z 12·56 vezmeme. Poneváč 6-ta časť z 12·56 je 2·093, tedy obnáša otázny obluk 2·093 *m*.

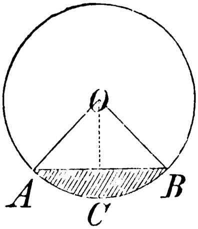
2. Koľko metrov má minútový obluk na rovníku?

Rozl. Poneváč rovník má 5400 geogr. míl čo učiní 5400 × 7420·4 či 40,070160 *m*, preto má minútový obluk na rovníku:

$$\text{Obl.} = 40070160 : \frac{360^\circ}{1^1} = 40070160 : 21600 = 1855 \cdot 1\ m.$$

c) *Vypočítanie plochy kruhového odseku.*

Spojíme-li ľubovoľné dva body kružnice na pr. *A* a *B* (*Obr. 147*) prímkou či tetivou, rozpadne sa celá kruhoplocha na dve časti, ktoré menujeme kruhovými *odsekami* (segmentami). Každá tetiva



Obr. 147.

delí celú kruhoplochu vždy na dva kruhové odseky. Ide-li tetiva cez stredobod kruhu, tenkrát sú otázne odseky rovnaké. Dľa tohoto hranice kruhového odseku sú tetiva a obluk. Kruhový odsek je tedy, *tetivou a oblukom uzavretá časť kruhovej plochy.*

Štvorcový obsah kruhového odseku na pr. odseku ACB najdeme, jestli ho prv do kruhového výseku docelíme, čo sa stane, jestli konečné body tetivy A a B so stredobodom kruhu O spojíme, a jestli zo štvorcového obsahu celého kruhového výseku $AOBC$, trojuhelník AOB t. j. tohoto štvorcový obsah odčítame.

Štvorcový obsah kruh. odseku ACB = štvor. ob kruh. výseku $AOBC$ — štvor. ob. troj. AOB.

Je-li na pr. polmer kruhu $OB = 4$ *dm*, tetiva $AB = 4$ *dm* a uhol $AOB = 60^0$, koľký je štvorcový obsah odseku ACB?

Najprv vyhľadáme štvorcový obsah výseku $AOBC$. Poneváč polmer je 4 *dm*, tedy je kružnica $= 2 \times 4 \times 3{\cdot}14 = 25{\cdot}12$ *dm*; obluk $= 25{\cdot}12 : (360^0 : 60^0) = 25{\cdot}12 : 6 = 4{\cdot}18$ *dm*; štvorcový obsah výseku $AOBC = 4{\cdot}18 \times {}^4/_2 = 8{\cdot}36$ dm^2.

Teraz vyhľadáme štvorcový obsah trojuhelníka AOB. Základná strana či $AB = 4$ *dm*, pol základ. strany $= 2$ *dm*. Výška dľa Pythagorovej poučky (Viď §. 39.) $= \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3{\cdot}46$.

Štvorcový obsah $= 3{\cdot}46 \times 2$ alebo $4 \times \frac{3{\cdot}46}{2} = 6{\cdot}92$ dm^2.

Odčítame-li zo štvor. obs. výseku $AOBC$ či z $8{\cdot}36$ dm^2 štvorcový obs. troj. AOB či $6{\cdot}92$ dm^2, zvýši na štvorcový obsah odseku $ACB = 1{\cdot}44$ dm^2.

Úlohy. 1. Je-li polmer nejakého kruhu $= 1$ *dm*, tetiva $= 1{\cdot}73$ *dm* a stredový uhol $= 120^0$; koľký je štvor. obsah ku tomuto uhlu patriaceho kruhového odseku?

Rozl. Štvorcový obsah celého výseku $= 2{\cdot}09 \times {}^1/_2 = 1{\cdot}046$ dm^2.

Štvor. ob. troj. $= 1{\cdot}73 \times \sqrt{\frac{(1^2 - 0{\cdot}86^2)}{2}} = 1{\cdot}73 \times \frac{0.51}{2}$ $= 1{\cdot}73 \times 0{\cdot}25 = 0{\cdot}4325$ dm^2.

Štvor. obsah odseku $= 1{\cdot}046 - 0{\cdot}4325 = 0{\cdot}6135$ dm^2.

Otázky. Čo rozumieme pod kruhovým odsekom? *Ktoré* čiary tvoria hranice kruhového odseku? *Ktorá* tetiva delí celú kruhoplochu na dva rovnaké odseky? *Ako* vypočítame nejakého kruhového odseku štvorcový obsah? Do čoho musíme ho prv docelit? *Ktorej* plochy je kruhový odsek čiastka?

d) *Vypočítanie ellipsy či elliptičnej plochy.*

Plochu ellipsy, na pr. elliptičného dna na vani, vypočítame, jestli polovicu jej veľkej osi polovicou jej malej osi a tento násobok číslom π či 3·14-mi násobíme. (Viď §. 11)

Plocha ellipsy = *pol. veľkej osi* $\times$ *pol malej osi* $\times$ π.

Označíme-li polovicu veľkej osi literou a, polovicu malej osi literou b, obdržíme miesto tejto nasledujúcu krátku formulku:

$$\text{Ploch. ellipsy} = a \times b \times \pi.$$

Má-li na pr. veľká os nejakej ellipsy, 8 *dm*, malá os 4 *dm*, tedy má jej plocha $4 \times 2 \times 3{\cdot}14$ či 25·12 dm^2.

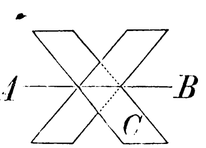
Časť tretia.

Telesomerba (Stereometria).

Predbežné pochopy.

§ 41. O vyznamenaní rovín v priestore.

Nastokneme-li na nejakú ihlicu, ktorá predstavuje prímku, kus rovného papieru, ktorý predstavuje rovinu, a krútime-li otáznu ihlicu okolo sebe samej: bude mať papier (či rovina) vždy inú a inú polohu. *Obr. 148.*



Obr. 148.

Podobne i na dvoch čapoch (dvoch bodoch) visiace dvere (rovina) majú dľa toho, ako ich viac alebo menej otvoríme, vždy inú a inú polohu. Z tohoto vyplýva, *že cez nejakú v priestore nalezajúcu sa prímku AB* (ako je na pr. otázna ihlica) *alebo i cez dva v priestore nalezajúce sa body A a B (Obr. 148.) nekonečne mnoho, rozdielnej polohy, rovín možno položiť.*

Vezmeme-li ale ku dvom otáznym bodom *A* a *B* alebo k prímke *AB* ešte tretí bod *C*, ktorý neleží s *A* a *B* v jednom smere, ale mimo ních: bude mať otázny papier (rovina) jednu určitú a tú istú polohu. Podobne i v čapoch (dvoch bodoch) visiace a v zámku (tretí bod) sa nalezajúce či zatvorené dvere majú len jednu polohu. Z tohoto vyplýva, *že cez nejakú v priestore nalezajúcu sa prímku a cez jeden mimo nej ležiaci bod*, a podobne, *i cez tri v jednom a tom istom smere neležiace body, možno len jednu rovinu položiť.*

K vyznamenaniu nejakej roviny v priestore, sú tedy zapotreby alebo tri, v jednom a tom istom smere neležiace body, alebo jedna prímka a jeden mimo nej ležiaci bod.

Taktiež i cez dve v priestore rovnobežne ležiace alebo jedna druhej sa dotýkajúce, alebo jedna druhú režúce prímky (laty) je len jedna rovina možná.

Úlohy. 1. Zabi do zeme tri v jednom a tom istom smere neležiace kolíky, tak že ich vrchy ležia v jednom a tom istom úrovni a polož na ne nejakú rovinu? (dosku).

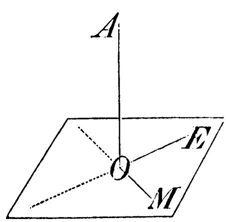
Koľko rovín možno na otázne tri koliky položiť? *Akú* polohu má na ne položená rovina? (doska).

§ 42. O polohe prímok ku rovine.

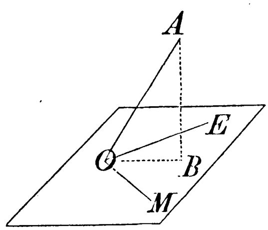
V § 2. skúmali sme, polohu prímky ku porovnaleľovi. Známe, že táto môže byť trojaká: vodorovná, kolmá a kosmá. Teraz budeme skúmať polohu prímky ku nejakej, akokoľvek ležiacej, rovine.

Maličká zkúška presvedčí nás, že nejaká prímka (na pr. rovná palička) môže stáť na nejakej rovine (na pr. na školskej tabuli alebo na vrchu stola) *kolmo* alebo *kosmo;* ďalej že môže mať s ňou rovnobežnú polohu; konečne že i v samej rovine môže nachodiť sa.

Či nejaká prímka na pr. prímka AO stojí na nejakej rovine C (*Obr. 149.*) kolmo, o tom sa presvedčíme, jestli cez jej podnožný bod O na ktorom stojí, dve, rozdieny smer majúce prímky na pr. OM a OE načiarame a uhly AOM a AOE ktoré táže s nimi uzaviera, vymeriame. Sú-li oba otázne uhly pravé či 90^0 veľké, vtedy stojí prímka AO na rovine kolmo, v odpornom prípade ale kloní sa ku nej, a síce na tej strane, na ktorej s rovinou ostrý uhol uzaviera. Tento uhol možno i vymerať. Poneváč ale každá kosmo stojaca prímka s rovinou na ktorej stojí nie jeden ale viac ostrých uhlov uzaviera, preto berieme za merítko jej sklonu ten najmenší z nich. Tento posledný najdeme jestli z jej najvyššieho bodu A kolmú AB na rovinu spustíme a tejto podnožný bod B s podnožným bodom prímky či s O spojíme, uhol AOB je hľadaný sklonný uhol otáznej prímky AO ku rovine. Poneváč OB je prômet prímky AO, preto otázny sklonný uhol je vlastne ten uhol, ktorý táže so svojím prômetom uzaviera. *(Obr. 150.)*



Obr. 149.



Obr. 150.

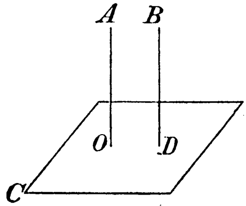
Úlohy. 1. Postav poťažne opri nejakú palicu na podlahu, o školskú tabulu! o stenu izby kolmo! *Ako* presvedčíme sa či upotrebená palička stojí na otáznych rovinách kolmo? — *Ako* stoja stĺpy v zahradnej ohrade? — *Ako* rastie tráva na lúke? — *Ako* skúmame kolmú polohu nejakého stĺpu závažou?

2. Zabodni nejakú palicu do zeme kosmo a vyhľadaj, na hor udaný spôsob, jej sklonný uhol!

Koľko uhlov uzaviera otázna palica so zemou (rovinou)? *Ktorý* z týchto uhlov menujeme sklonným uhlom? *Ako* vyhľadávame sklonný uhol?

Prímka jejžto oba konce rovnak vysoko nad rovinou nachodia sa, má k tejto rovnobežnú polohu. Takáto, či rovnobežná prímka neuzaviera s rovinou žiadon uhol. Či nejaká prímka má k rovine rovnobežnú polohu, o tom sa presvedčíme, jestli z oboch jej koncov na rovinu kolmé spustíme a ich dĺžku vymieriame. Sú-li obe kolmé rovnaké, má prímka s rovinou rovnobežnú polohu.

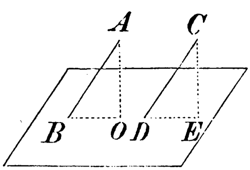
§ 43. O rovnobežných prímkach v priestore.



Obr. 151.

Postavíme-li na nejakú rovinu ku kolmej AO ešte druhú kolmú (*Obr. 151.*) BD, budú obe mať jeden a ten istý smer, a preto sú rovnobežné. Poneváč obe stoja na rovine kolmo, preto je u oboch i sklonný uhol rovnaký, 90° veľký. Otázne prímky majú tedy nie len rovnaký smer ale i rovnaký sklon ku rovine. A poneváč majú rovnaký 90° veľký sklon, preto i cez ne položená rovina, musí mať kolmú polohu ku rovine.

Chceme-li tedy, aby doštená ohrada nejakej zahrady stála kolmo, musíme predovším jej stĺpy kolmo osadiť.



Obr. 152.

Načiarame-li k prômetu BO kosmo stojacej prímky AB (*Obr. 152.*) s ním rovnobežnú a rovnodlhú prímku DE a postavíme-li v konečnom bode E poslednej, toľkú kolmú EC ako je AO a spojíme-li bod C s D obdržíme $\triangle$ DCE. Tento posledný je s $\triangle$ ABO shodný a síce preto, že u oboch rovnakležiace katéty sú rovnaké a že i nimi uzavretý uhol je rovnaký. Poneváč ale u oboch rovnakležiace katéty majú i rovnaký smer, musí i hypotenúsa mať u oboch jeden a ten istý smer. Keďže ale smer oboch hypotenús je rovnaký, preto sú obe *rovnobežné.* Poneváč ďalej, $\sphericalangle$ ABO a $\sphericalangle$ CDO sú rovnaké, preto je sklonný uhol u oboch prímok rovnaký. Položíme-li cez obe hypotenúsy rovinu, bude i táto mať ku prvej rovine ten istý sklon, ako prímky AB a CD.

Zo všetkého tu povedaného vyplýva, *že v priestore rovnobežné prímky majú nielen rovnaký smer ale i rovnaký sklon ku jednej a tej istej rovine, na ktorej stoja a naopak, že rovnaký smer a rovnaký sklon ku jednej a tej istej rovine majúce prímky sú rovnobežné.*

Úlohy. 1. Postav na rovine C (*Obr. 151.*) ku kolmej AO v bode D rovnobežnú!

Rozl. Postavím v bode D na rovinu C kolmú BD, poneváč posledná má s AO rovnaký sklon a rovnaký smer a preto je rovnobežná.

2. Postav na nejakej rovine *(Obr. 152.)* ku kosmej AB, v bode D rovnobežnú.

Rozl. Najprv vyhľadám prômet prímky AB či BO, načiaram cez otázny bod D s ním rovnobežnú a rovnodlhú prímku DE, postavím v bode E kolmú EC toľkú ako je AO, a spojím jej konečný bod C s D. Prímka CD má s AB, rovnaký smer a rovnaký sklon ku rovine a preto je s AB rovnobežná.

Vystrihneme-li z hrubého papieru dva pravouhelné a shodné trojuhelníky, a postavíme-li ich na nejakú rovinu tak, že rovnaké ich katéty ležia na nej rovnobežno, budú i obe ich hypotenúsy jedna k druhej rovnobežnú mať polohu. (Viď *obr. 152.*).

V priestore rovnobežné prímky predstavujú každé dva susedné rohy na dachu (áno i všetky rohy na jednom a tom istom boku nejakého dachu). Poneváč rovnobežné prímky majú rovnaký smer a sklon, preto cez dve alebo viac v priestore rovnobežných prímok, ktorých podnožia v jednej a tej istej prímke ležia, možno len jednu rovinu položiť. A preto, chceme-li aby bok nejakého dachu predstavoval rovno naklonenú rovinu musíme prv jeho rohy rovnobežno t. j. tak postaviť, aby ako ich smer tak i ich sklon ku povale bol rovnaký.

K vyhľadaniu a určeniu rovnakého smeru a sklonu postaviť sa majúcich rohov možno pravouholný z laták alebo z dosák sbitý trojuhelník upotrebiť. Šmíkame-li takýto trojuhelník rovnobežne so samým sebou jednou a tou istou katétou po plátve, udá jeho hypotenúsa nie len smer ale i sklon poťažných rohov.

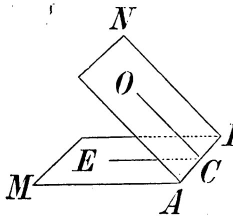
Otázky. *Koľkoraký* smer a koľkoraký sklon majú rohy na jednom a tom istom boku nejakého dachu? *Ako* postavíme k prvému rohu druhý rovnobežno pomocou pravouhelného trojuhelníka? *Koľko* rovín možno cez dve (alebo na dve) v priestore rovnobežné prímky (laty) položiť?

§ 44. O plochových uhloch či o plochouhloch.

O dvoch prímkach v jednej a tej istej rovine sa nalezajúcich známe, že jedna k druhej môžu mať alebo rovnobežnú alebo nerovnobežnú polohu. I to známe, že nerovnobežné prímky (alebo ich predĺženiny) sa alebo stýkajú alebo jedna druhú režú, a že v oboch posledných prípadoch uzavierajú medzi sebou uhol alebo uhly.

Tomuto podobné zkúsime i u dvoch rovín. Aj tieto môžu byť alebo rovnobežné alebo nerovnobežné. Tieto posledné či nerovnobežné môžu sa (alebo ich predĺženiny) alebo stýkať alebo jedna druhú rezať. Keď sa nerovnobežné roviny alebo ich predĺženiny jedna s druhou stýkajú alebo režú, povstane takže uhol alebo uhly. Pravdaže ramená takýchto uhlov nie sú už viac prímky, ale roviny, a síce *ramenné roviny* a ich vrchol nenie viac bod, ale prímka, a síce *vrcholová prímka*. Dobrý príklad takého uhlu podáva nám máličko roztvorená kniha. Jej roztvorené dve časti predstavujú dve ramenné roviny či dve ramená, a jej chrbát zas vrcholovú prímku či vrchol otázneho uhlu. Podobný či dvoma rovinami uzavretý uhol znázorňujú i dve susedné steny izby, boky dachu, dve súsedné steny múru atd. Poneváč ramená takéhoto, dvoma rovinami uzavretého uhlu sú plochy, preto menujeme ho *plochovým uhlom* (kútom) alebo *plochouhlom*.

Prímkami uzavretý uhol označujeme, ako už známo, troma literami, z ktorých jedna, a síce prostredná, stojí u vrcholu, a ostatné dve u koncov oboch ramien. Podobne označujeme i plochouhol, s tým rozdielom, že jeho vrchol, poneváč je prímka, a síce vrcholová prímka, označíme dvoma v závorke uzavretými literami, a ramená každé jednou literou.



Obr. 153.

Tak na pr. rovinami M a N uzavretý plochový uhol, jehožto vrcholová je prímka AB, označujeme takto: $\measuredangle$ $M(AB)N$ (*Obr. 153.*) Vrcholovú prímku AB, v ktorej sa otázne dve roviny stýkajú, menujemeináčej *hranou*.

Plochového uhlu veľkosť vyhľadáme, jestli na vrcholovú prímku, v jej niektorom bode, v oboch ramenných rovinách, kolmé prímky postavíme a potom tento prímkami uzavretý uhol vymeriame. Tak na pr. veľkosť uhlu $M(AB)N$ v stupňoch najdeme, jestli v nejakom bode vrcholovej prímky AB. na pr. v C, na jednej z ramenných rovín kolmú OC a na druhej kolmú EC postavíme a tento oboma kolmými prímkami uzavretý uhol OCE uhlomerom vymeriame. Koľko stupňov má $\measuredangle$ OCE, práve toľko stupňov má i rovinami M a N uzavretý plochový uhol $M(AB)N$. Poneváč dvoma plochami uzavretý uhol i sklon otáznych rovín, jednej k druhej, udáva, preto možno tenže i *sklonným uhlom rovín* pomenovať.

Úlohy. 1. Roztvor nejakú knižku tak, že jej boky uzavierajú ostrý! pravý! tupý! uhol.

Koľký sklonný uhol uzaviera poval so susednou stenou? podlaha so susednou stenou? Ukiaž ramenné roviny a vrcholovú prímku týchto uhlov!

Ako vyhľadáme sklonný uhol dachu, jeho bokov? Čo predstavuje v tomto prípade každý pár rohov? a čo oba boky dachu? a čo hrebeň dachu?

Ako určíme sklon hore vrchom idúcej hradskej ku vodorovnému smeru? (na pr. nalomeným linonárom) (Viď. obr. 134.)

§ 45. O rovnobežných rovinách.

Postavíme-li na stôl hore koncom dve knižky (alebo dve daštičky) tak, že ich podnožné kraje (čiary), ktorými sa dotýkajú stola, ležia rovnobežno, budú i obe knižky (alebo daštičky) jedna k druhej rovnobežnú mať polohu.

Nakloníme-li obe takto stojace knižky (alebo daštičky) rovnako ku stolu pravdaže v jednu a tú istú stranu stola, bude ich vzájomná poloha i potom rovnobežná.

V oboch týchto prípadoch maly obe daštičky alebo knižky nie len rovnaký smer, ale i rovnaký sklon ku stolu. Keď stály hore koncom, bol sklonný uhol 90° veľký, keď sme ich ku stolu rovnako naklonili, bol tenže menší, avšak u oboch rovnaký.

Opreme-li otázne knižky (alebo daštičky) o stenu alebo tabulu tak, že ich podnožné, tabule alebo steny dotýkajúce sa kraje ležia rovnobežno a že sklon oboch ku stene alebo tabule, v jednu a tú istú stranu, je rovnaký, bude ich poloha tiež rovnobežná.

Z tohoto vyplýva, *že dve (alebo viac) roviny, ktoré majú rovnaký smer a ku nejakej tretej rovine rovnaký sklon, sú rovnobežné, a naopak, že rovnobežné roviny majú rovnaký smer a rovnaký sklon* ku tej rovine, na ktorej stoja, alebo ktorú režú.

Úlohy. 1. Postav na stôl dve knižky kosmo, avšak rovnobežno!

Ako oprobujeme, či otázne knižky stoja rovnobežno? *Ako* musia ležať ich podnožné kraje, ktorými sa stola dotýkajú, a aký musí byť u oboch sklonný uhol? Koľkoraký smer a koľkoraký sklon majú rovnobežné roviny? *Aké* roviny predstavujú oprotné steny izby? podlaha a povala? *Koľký* je u týchto rovín sklonný uhol? *Ako* stojí podlaha a povala na niektorej zo stien? *Ako* stoja oprotné steny na podlahe?

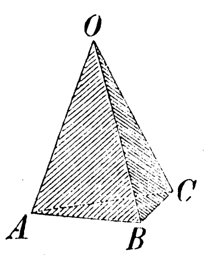
Aké roviny predstavujú priečne dosky u polici? a boky rámu u polici?

V nútrobách zeme nalezajúcich sa rudonosných ložísk, vrstiev (gangov) smer určujú baníci dľa strán sveta kompasom a sklon ku horizontu či obzoru v stupňoch uhlomerom.

Úlohy. 1. Postav na stôl knižku, (ktorá predstavuje rudonosný gang) tak že leží od západu na východ, a že jej sklon ku stolu, ku horizontu má 60°!

§ 46. O telesových uhloch či telesouhloch.

Tri (alebo viac) v jednom bode režúce sa roviny (plochy) uzavierajú medzi sebou s jednej strany ohraničený priestor, ktorý menujeme telesouhlom alebo *telesovým* uhlom. *(Obr. 154.)*. Tak na



Obr. 154.

pr. podlaha a dve, ktorékoľvek, susedné steny izby, uzavierajú telesový uhol.

Na každom telesovom uhle pozorujeme po prvé, režúce sa roviny (plochy), po druhé, hrany či tie prímky, v ktorých sa dve susedné roviny (plochy) režú, a po tretie, vrchol uhlu či ten bod v ktorom sa hrany schádzajú. Tak na pr. bod O je vrchol telesového uhlu O (ABC); OA, OB, OC sú jeho do nekonečnosti idúce hrany, a AOC, BOC, a AOB; tri režúce sa a tiež do nekonečnosti idúce roviny.

Každé dve súsedné hrany uzavierajú medzi sebou uhol. Tak na pr. hrana OA a OC uzaviera uhol AOC, hrana AO a OB uhol AOB, a hrana OB a OC uhol BOC. Tieto hranami uzavreté uhly, menujeme *stranami* telesového uhlu. Na obr. 154 znázornený telesový uhol má tedy tri strany a síce: AOC, AOB, BOC.

Každé dve súsedné roviny (plochy) uzavierajú tiež uhol medzi sebou. Tak na pr. rovina AOC a AOB uzaviera $\sphericalangle\, B\,(AO)\,C$ rovina AOB a BOC uzaviera $\sphericalangle\, A\,(OB)\,C$ a rovina BOC a AOC uzaviera uhol $A\ (OC)\ B$. Tieto plochami uzavreté či plochové uhly menujéme *uhlami* telesového uhlu O (ABC).

(Telesové uhly označujeme tak, že u vrcholu nalezajúcu sa literu píšeme najprv a ostatné za ňou v závorke).

Dľa tohoto telesový uhol O (ABC) má tri uhly (hrany) a tri strany. Každý telesový uhol má toľko strán koľko uhlov (hrán). Ako strany tak i uhly telesového uhlu meriame stupňami.

Dľa počtu strán alebo hrán (uhlov) rozoznávame. tristranné alebo trihranné, štyristranné alebo štyrihranné telesové uhly atď.

Telesový uhol, u ktorého všetky strany sú rovnaké, menujeme *rovnostranným*, a u ktorého všetky uhly sú rovnaké zas *rovnouhlým* telesovým uhlom.

Takový *rovnouhlý* telesový uhol, u ktorého všetky strany t. j. hranami uzavreté uhly rovnajú sa uhlom nejakého pravidelného mnohouhelníka (na pr. uhlom štvorca, alebo pravidelného päť- alebo trojuhelníka) menujeme *pravidelným* telesovým uhlom. Dľa tohoto pravidelného telesového uhlu strany majú všetky alebo po 60^{0}, alebo po 90^{0}, alebo po 108^{0}.

Telesové uhly, ktoré jeden do druhého vložené sa cele kryjú, menujeme *shodnými*. Shodné telesové uhly majú rovnaké i strany i uhly (hrany). Takéto shodné telesové uhly má na pr. izba, bo ako uhly tak i strany jej telesových uhlov sú rovnaké, 90^{0} veľké.

§ 47. O telesách.

V úvode rozvinuli sme, že všetko, čo smyslami pozorujeme a čo zaujíma nejaký priestor: menujeme telesom, že tedy telesá sú ohraničené priestory a že hranice telies sú plochy. Ďalej, že rozdiel robíme medzi prirodzenými či fysičnými a geometrickými telesami.

Telesá, ichžto hraničné plochy sú rovné (roviny), menujeme *uhlastými* telesami. Tak na pr. na všetky strany obrezaná doska alebo dom sú uhlasté telesá. Naproti tomu telesá, ichžto hraničné plochy sú krivé alebo miešané, t. j. i krivé i rovné, menujeme *okrúhlymi* telesami. Tak na pr. válec alebo guľa je okrúhle teleso.

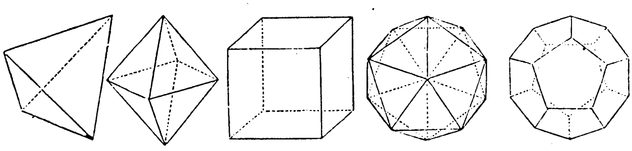
Hraničné plochy uhlastých telies sú prímočiarne obrázce čili figury, ako sú: trojuhelníky, štvoruhelníky atď. Tieto môžu byť pravidelné alebo nepravidelné.

Uhlastých telies hrany, t. j. tie čiary, v ktorých sa ich susedné dve hraničné plochy režú, môžu byť rovnaké alebo nerovnaké. Rozdiel robíme medzi *základnými* a *bočnými* hranami. Základnými hranami menujeme tie, ktoré u základných plôch a bočnými, ktoré po bokoch telesa nachodia sa. Tak na pr. základné hrany izby t. j. ňou zaujatého priestoru sú tie, ktoré povala a podlaha so súsednými stenami, a bočné hrany zas tie, ktoré dve susedné steny medzi sebou uzavierajú.

Konečne, uhlastých telies telesové uhly sú alebo pravidelné alebo nepravidelné; (Viď predošlý §.) potom rovnostranné alebo nerovnostranné, rovnouhlé alebo nerovnouhlé.

Uhlasté telesá, ichžto telesové uhly sú pravidelné a ichžto hraničné plochy sú shodné a pravidelné (troj-, štvor alebo päťuhelníky) mnohouhelníky, menujeme *pravidelnými* telesami.

Takýchto či pravidelných uhlastých telies nachodí sa nasledujúcich päť. (*Obr. 155.*)



Obr. 155.

Prvé, má za hraničné plochy rovnostranné a shodné trojuhelníky počtom štyri a preto menuje sa *šťyrstenom* (tetraedrom).

Druhé, má takýchto hraničných plôch osem, a preto menuje sa *osmistenom* (oktaedrom).

Tretieho hraničné plochy sú shodné štvorce, počtom šesť a preto menuje sa *šestistenom* (kockou, hexaedrom).

U štvrtého sú hraničné plochy, takže rovnostranné trojuhelníky počtom dvadsať a preto menuje sa *dvadsatistenom* (ikosaedrom).

Posledného plochy sú zas pravidelné a shodné päťuhelníky počtom dvanásť, a preto menuje sa *dvanástistenom* (dodekaedrom).

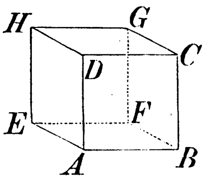
U každého z týchto telies pozorujeme, krem pravidelných a shodných hraničných plôch, i rovnaké hrany a pravidelné a rovnaké telesové uhly.

Otázky. 1. *Koľko* hrán má každé jedno z týchto telies? a koľko telesových uhlov (rohov); 2. Aké sú tieto hrany a telesové uhly u každého z týchto telies? 3. *Koľko* stupňov majú jednotlivé strany každého telesového uhlu? *Koľko* stupňov majú všetky strany každého telesového uhlu u každého z týchto telies?

Odp. Štyristen má 6 hrán, 4 telesové uhly (rohy), každá strana telesového uhlu 60^0, všetky tri 3×60^0 či 180^0. — Osmisten má 12 hrán, 6 telesových uhlov (rohov); telesového uhlu jedna strana 60^0, všetky štyri 4×60^0 či 240^0. Šestisten či kocka ma 12 hrán, 8 telesových uhlov (rohov); telesového uhlu jedna strana 90^0, všetky tri 270^0. Dvadsatisten má 30 rovnakých hrán, 12 telesových uhlov, každého uhlu strana 60^0, všetkych päť 300^0. Dvanástisten má 30 hrán, 20 telesových uhlov (rohov); každá strana telesového uhlu 108^0, všetky tri 324^0.

§ 48. Znázornenie krychle čili kocky.

Krychľa čili kocka je teleso, bo zaujíma, zôkol vôkol plochami ohraničený priestor. Hranice t. j. steny krychle sú kvadráty či štvorce (*Obr. 156.*) Spodný kvadrát *ABFE*, na ktorom leží, predstavuje jej spodnú základnú a vrchný kvadrát *DCGH* jej vrchnú základnú plochu. Zôkol vôkol či po bokoch nalezajúce sa kvadráty: *EADH*, *ABCD*, *BCGF* a *EFGH* sú jej bočné plochy. Úhrnom má krychľa šesť hraničných plôch.



Obr. 156.

Všetky tieto hraničné plochy sú shodné. (Viď § 26.) Každé jej dve susedné hraničné plochy či steny, stoja jedna na druhej kolmo. Tie miesta, kde sa jej dve susedné hraničné plochy režú, menujeme, ako už známo, hranami. Poneváč tieto hrany tvoria hranice jej štvorcových stien, preto menujeme posledné i *štvorhranami*. Všekých hrán má krychľa dvanásť; hore štyri, dolu štyri a zôkol vôkol štyri. Aj tieto stoja jedna na druhej kolmo a sú rovnaké. Ten priestor, kde sa hraničné plochy režú (vnútri), menujeme telesovým uhlom a ten bod, kde sa hrany schádzajú rohom. Ako telesových uhlov, tak i rohov má kocka osem, hore štyri, dolu štyri. Telesové uhly sú kocky pravidelné (Viď § 46.) Poneváč všetky hraničné plochy sú u kocky shodné a pravidelné (štvorce) a poneváč i jej telesové uhly sú tiež pravidelné, preto je kocka či krychľa pravidelné teleso. (Viď § 47.)

Ako každé teleso, podobne i krychľa má tri rozmery, a síce: šírku, dĺžku a výšku. Predstavuje-li jedna u základnej plochy ležiaca hrana na pr. AB jej šírku, tedy znamená jej susedná druhá u tej istej plochy ležiaca hrana na pr. BF jej dĺžku a na týchto dvoch stojaca BC jej výšku. Všetky tieto tri rozmery sú u kocky rovnaké. Kocka má rovnakú dĺžku, šírku a výšku.

Úlohy. 1. Vystrihni z hrubého papieru šesť shodných štvorcov, postav na jeden, čo základný, zôkol vôkol kolmo štyri a šiestym uzavri vrch.

Čo za teleso predstavuje takto uzavretý priestor? *Koľko* kraničných plôch či stien a telesových uhlov má kocka? *Koľko* stupňov majú strany každého telesového uhlu? a plochové uhly? *Koľkoraké* sú jej rozmery? Ktoré sú jej základné? a bočné plochy? Prečo menujeme kocku pravidelným telesom? atď.

§ 49. Znázornenia kubičného metra, kub. decimetra, kub. centimetra a kub. millimetra.

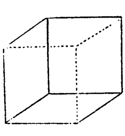
Kocku či krychlu menujeme ináčej i kubikom.

Kocku, ktorej ako dĺžka tak i šírka a výška má 1 meter, menujeme *kubičným* alebo *krychľovým* metrom Hraničné plochy či steny kubičného metra sú *štvorcové* metre. Celý povrch kubičného metra obnáša tedy šesť štvorcových metrov a ním zaujatý priestor 1 kubičný meter. Dve takéto krychle, zaujímajú dva kubičné metre veľky priestor atď.

Kocku, ktorej ako šírka tak i výška a dĺžka je 1 dmeter veľká, menujeme *kubičným decimetrom*. Hraničné plochy kubičného decimetra sú štvorcové decimetre. Celý povrch kubičného decimetra obnáša tedy šesť štvorcových decimetrov a ním zaujatý priestor 1 kub. decimeter. Dve takéto krychle zaujímajú dva kubičné decimetre veľký priestor atď.

Koľko tabličiek a jakej veľkosti a podoby treba je k ohraničeniu 1 kub. decimeter veľkého priestoru.

Kocku či krychľu 1 *cm* dlhú a práve tak širokú a vysokú menujeme *kubičným centimetrom* Hraničné plochy či steny kub. centimetra sú štvorcové centimetre. A ponevač týchto má táto krychľa šesť, preto jej celý povrch obnáša šesť štvorcových centimetrov.



Obr. 157.

Keďže tejto veľkosti jedna krychľa zaujíma 1 kub. centimeter veľký priestor, tak dve takéto kocky zaujímajú 2 kub. centimetre veľký priestor atď. *(Obr. 157.)*

Kocku, ktorej všetky tri rozmery sú 1 millimeter veľké, menujeme *kubičným millimetrom.*

Krem týchto spomenutia zasluhuje ešte i krychľový či kubičný *kilometer*, ktorý predstavuje kocku kilometer či 1000 *m* dlhú, práve toľko širokú a toľko vysokú.

Kubičné metre označujeme takto: m^3, kub. decimetre takto: dm^3, kub. centimetre: cm^3, a kub. millimetre: mm^3, kub. kilometer km^1. Tak na pr. 5 cm^3 značí 5 kub. centimetrov; 8 m^3 značí 8 kub. metrov, 3 mm^3-tri kub. millimetra atď.

Kocka, ktorej všetky tri rozmery sú 1 míľa veľké, menuje sa kubičnou míľou. Steny kubičnej míle sú štvorcové míle.

Pred tým upotrebovali v živote nasledujúce kubiky: kubičný láktor či kub. siahu, kub. šúch či kub. stopu, a kubičný palec či kubičný côl.

§ 50. O premieňaní kubičných čili telesových alebo priestorových mier.

Poneváč základná plocha kub. metra je 10 *dm* dlhá a 10 *dm* široká, preto má jej štvorcový obsah 10 × 10 či 100 dm^2. Na toľkúto plochu možno, jedno k druhému, 100 dm^3 postaviť. A poneváč výška kub. metra, tiež 10 *dm* obnáša, preto 10 takýchto vrstiev zaujíma práve 1 kub. meter veľký priestor. Z tohoto vyplýva, že 1 m^3 má 10 × 100 dm^3 či 1000 dm^3, a naopak že 1000 dm^3 je toľko ako 1 m^3. Kub. decimetre sú tedy *tisíciny* kub. metra.

A poneváč každých 1000 dm^3 je 1 m^3
tak » 100 dm^3 je $^1/_{10}$ či 0.1 m^3
» 10 dm^3 je $^1/_{100}$ či 0.01 m^3 a
» 1 dm^3 je $^1/_{1000}$ či 0.001 m^3.

A naopak, poneváč každý 1 m^3 je 1000 dm^3
tak každá $^1/_{10}$ či 0.1 m^3 je 100 dm^3
» $^1/_{100}$ či 0.01 m^3 je 10 dm^3
» $^1/_{1000}$ či 0.001 m^3 je 1 dm^3

Podobne možno kubičný decimeter na kub. centimetre rozmeniť. Poneváč kub. decimeter je 10 *cm* dlhý a 10 *cm* široký, preto má jeho základná plocha 10 × 10 či 100 cm^2. Na toľkúto plochu možno 100 cm^3 jedno k druhému postaviť. A poneváč 10 takýchto vrstiev práve toľký priestor ako 1 dm^3 zaujíma, preto 10×100 cm^3 či 1000 cm^3 je toľko ako 1 dm^3 a naopak, 1 dm^3 je toľko ako 1000 cm^3. Kub. centimetre sú tedy *tisíciny* kub. decimetra.

A poneváč každých 1000 cm^3 je 1 dm^3
tak, » 100 cm^3 je $^1/_{10}$ či 0.1 dm^3
» 10 cm^3 je $^1/_{100}$ či 0.01 dm^3
» 1 cm^3 je $^1/_{1000}$ či 0.001 dm^3.

A naopak, poneváč každý 1 dm^3 je 1000 cm^3
tak, každá $^1/_{10}$ dm^3 či 0.1 dm^3 je 100 cm^3
» $^1/_{100}$ dm^3 či 0·01 dm^3 je 10 cm^3;
» $^1/_{1000}$ dm^3 či 0.001 dm^3 je 1 cm^3.

Týmto istým spôsobom presvedčíme sa, že 1 cm^3 je 1000 mm^3 a naopak, že 1000 mm^3 je 1 cm^3.

Konečne, poneváč 1 kub. kilometer predstavuje kocku 1000 m dlhú a 1000 m širokú, preto má jeho základná plocha 1000 $\times$ 1000 či 1,000000 m^2. Na toľkúto plochu možno 1,000000 m^3 jedno k druhému postaviť. A poneváč takýchto 1000 vrstiev činí 1 km^3 preto, 1000 $\times$ 1,000000 m^3 či 1000,000000 m^3 je 1 km^3 a naopak.

Poznámka. Všetky tu udané kocky majú podobné hraničné plochy (štvorce) a shodné telesové uhly, preto sú jedna druhej podobné. Áno, kubičné decimetre alebo kub. centimetre atď. sú jeden druhému nielen podobné, ale i rovnoveľké, bo zaujímajú rovnaký priestor. A poneváč telesá, ktoré sú rovnoveľké a jedno druhému podobné menujeme shodnými, (kongruentnými) preto sú kub. decimetre, alebo kub. centimetre atď. shodné telesá.

Otázky. 1. Koľko dm^3 je: $a)$ 128 cm^3? $b)$ 34 cm^3? $c)$ 3040 cm^3? Odp. $a)$ $\frac{128}{1000}$ či 0.128 dm^3 $b)$ $\frac{34}{1000}$ či 0.034 dm^3 $c)$ $\frac{3040}{1000}$ či 3.040 dm^3

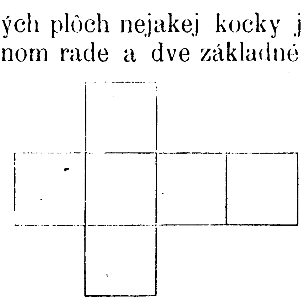
2. Koľko cm^3 je: $a)$ $^7/_{10}$ dm^3? $b)$ $^{14}/_{100}$ dm^3? $c)$ $^{21}/_{1000}$ dm^3? Odp. $a)$ 700 cm^3, $b)$ 140 cm^3, $c)$ 21 cm^3.

3. Koľko m^3 je: $a)$ 14 dm^3? $b)$ 560 dm^3? $c)$ 2040 dm^3? Odp. $a)$ $^{14}/_{1000}$ či 0.014 m^3, $b)$ $\frac{560}{1000}$ či 0.560 m^3, $c)$ $\frac{2040}{1000}$ či 2.040 m^3.

4. Koľko dm^3 je: $a)$ $^7/_{10}$ či 0.7 m^3? $b)$ $^{18}/_{100}$ či 0.18 m^3, $c)$ $\frac{35}{1000}$ či 0.035 m^3? Odp. $a)$ 700 dm^3, $b)$ 180 dm^3 $c)$ 35 dm^3.

§ 51. O vymeriavaní povrchu a kubičného obsahu kocky.

Sostavíme-li všetkých šesť hraničných plôch nejakej kocky jednu ku druhej tak, že bočné štyri ležia v jednom rade a dve základné hore a dolu pod týmito (*Obr. 158*), obdržíme tak zvanú *sieť* otáznej kocky. Táto sieť predstavuje jej celý povrch. A poneváč všetky tieto hraničné plochy sú shodné štvorce, preto štvorcový obsah celého jej povrchu najdeme, jestli štvorcový obsah len jedneho z týchto štvorcov vymeriame a tento potom 6-mi



Obr. 158.

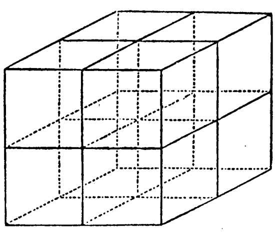
násobíme. Obnáša-li jedna strana otázneho štvorca na pr. 2 *dm*, tedy je jeho štvorcový obsah 4 dm^2, a celý povrch otáznej kocky 6×4 dm^2 či 24 dm^2.

Označíme-li stranu niektorého jej štvorca literou *s*, je jeho

štvorcový obsah $= s \times s$ či s^2 a

povrch celej kocky $= 6 \times s^2$.

Vymeriame-li nejakej kocky základnú plochu v m^2-och alebo cm^2-och alebo mm^2-och, vyzvieme, koľko m^3-ov, poťažne dm^3-ov alebo mm^3-ov možno na ňu, jedno ku druhému postaviť. Vymeriame-li na to, toho istého pomenovania mierou dĺžky, ktorou sme šírku a dĺžku vymerali i jej *výšku*, vyzvieme, koľko takýchto kubikových vrstiev celá kocka v sebe obsahuje, či koľký je je kubičný obsah. Tak na pr. je-li nejaká kocka 2 *dm* dlhá a 2 *dm* široká, obnáša jej základná plocha 2×2 či 4 dm^2. Na toľkúto plochu možno, jedno k druhému, 4 dm^3-tre postaviť. A poneváč jej výška je tiež 2 *dm* veľká, preto obsahuje táže dve takéto vrstvy kubičných decimetrov, či 2×4 dm^3 či 8 dm^3. A to je jej kubičný obsah. *(Obr. 159.)* Z tohoto vyplýva, *že kub. obsah nejakej kocky najdeme, jestli jej základnú plochu rovného pomenovania výškou násobíme.* Obdržaný násobok znamená potom kubíky toho pomenovania, akého pomenovania mierou sme ako základnú plochu tak i výšku vymerali. Tak na pr. vymerali-li sme ako základnú plochu tak i výšku v metroch, znamená otázny násobok m^3-tre, vymerali-li sme ako základnú plochu tak i výšku v *dm*-och, znamená násobok dm^3-tre atď.



Obr. 159.

Áno, poneváč základná plocha je násobok zo šírky a dĺžky či šírka $\times$ dĺžka, preto kub. obsah nejakej kocky i tak ešte najdeme, jestli ako dĺžku tak i šírku a výšku jednou a tou istou mierou dĺžky vymeriame, a obdržané čísla sťa nepomenované jedno s druhým násobíme, a obdržaný násobok v kubičných mierach toho pomenovania vyslovíme, akého pomenovania sú všetky jej tri rozmery udávajúce čísla. Tak na pr. hor udanej kocky kub. obsah i tak najdeme: jestli jej rovnopomenovanú šírku, dĺžku a výšku ako nepomenované čísla $(2 \times 2 \times 2)$ jedno s druhým násobíme a tento násobok (8) v kubičných *decimetroch* vyslovíme, preto tak, že i výška, šírka a dĺžka v decimetroch je vyslovená. Označíme-li základnú plochu nejakej kocky literou *z* a výšku literou *v*, tedy je jej

$$\text{kub. obsah} = z \times v.$$

Podobne, označíme-li nejakej kocky šírku literou *š*, dĺžku literou *d*, a výšku literou *v*, je jej

$$\text{kub. obsah} = š \times d \times v.$$

Poneváč ale u kocky je $\check{s} = d = v$ a poneváč každý z týchto troch jej rozmerov je toľký ako ktorákoľvek jej hrana či na krátce h, preto je jej

$$\text{kub. obsah} = h \times h \times h \text{ či } h^3.$$

Úlohy. 1. Vyhľadaj kub. obsah a povrch takovej kocky, jejžto hrana je 12 *cm* dlhá!

Rozl. Povrch jednej plochy je 12×12 či 144 cm^2 tak povrch celej kocky je 6×144 či 864 cm^2 a kub. obsah $= 12 \times 12 \times 12$ či 1728 cm^3 či 1 dm^3 a 728 cm^3.

2. Jestli 1 kub. decimeter granitu čili žúly váži 2.7 *kg*; koľkú váhu má z tohoto kameňa vykresaná, 1.6 *m* dlhá alebo široká kocka?

Rozl. Najsamprv vyhľadáme jej kub. obsah. Poneváč je 1.6 *m* či 16 *dm* dlhá, preto je jej kub. obsah $= 16 \times 16 \times 16$ či 4096 dm^3 a poneváč 1 dm^3 žúly váži 2.7 *kg*, preto 4096 dm^3 či celá kocka váži 4096×2.7 *kg* či 110959.2 *kg*.

3. Nejakej, kockovú podobu majúcej nádoby, jedna hrana je 3.6 *dm* dlhá; koľko litrov najakej tekutiny vleje sa do nej?

Rozl. Poneváč jej hrana je 3.6 *dm* dlhá, preto je jej kub. obsah $= 3.6 \times 3.6 \times 3.6 = 46.656$ dm^3 a poneváč do dutého kub. decimetra vleje sa 1 liter akejkoľvek tekutiny, preto vleje sa do celej tejto kocky 46.656 litrov.

4. Vyhľadaj rad radom kub. obsah: 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, atď.... 10 *cm* dlhé hrany majúcich kociek.

Odp. 1 cm^3 8 cm^3, 27 cm^3 64 cm^3, 125 cm^3 atď.... 1000 cm^3.

Tieto posledné čísla, ako: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 menujeme *kubičnými číslami*, a im zodpovedajúce predošlé ich *kubičnými koreňami*.

Matematici označujú hor udané kubičné čísla v podobe tak zvaných mocnín. Tak na pr. kubičné číslo 1 či $1 \times 1 \times 1$ píšu takto 1^3 (čítaj, jedno na tretej mocnine); kub. číslo 8 či $2 \times 2 \times 2$ takto: 2^3 (čítaj, dve na tretej mocnine); kub. číslo 27 či $3 \times 3 \times 3$ takto: 3^3; kub. číslo 64 či $4 \times 4 \times 4$ takto: 4^3 atď. Dľa tohoto $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$ atď. $1000 = 10^3$.

Kubičný koreň nejakého kubičného čísla najdeme, jestli ho na tri rovné činitele rozložíme. Jeden z týchto činiteľov je jeho kubičný koreň. Tak na pr. kub. koreň čísla 27 či $\sqrt[3]{27}$ sú 3, bo $3 \times 3 \times 3$ je 27; kub. koreň čísla 64 či $\sqrt[3]{64} = 4$, bo $4 \times 4 \times 4$ je 64, atď.

5. Nejaká kocka zaujíma 216 dm^3 veľký priestor; koľká je jej jedna hrana?

Rozl. Dĺžku hrany najdeme, jestli z kub. obsahu t. j. z tento udávajúceho čísla, kub. koreň vyhľadáme. A poneváč kub. koreň z 216 či $\sqrt[3]{216}$ je číslo 6, bo $6 \times 6 \times 6$ je 216 preto je jej jedna hrana 6 *dm* dlhá.

6. Jestliže kub. obsah nejakej kocky má 35 m^3; koľká je jej šírka, alebo dĺžka, alebo výška?

Rozl. Šírku alebo dĺžku otáznej kocky najdeme, jestli kub. koreň čísla 35 vyhľadáme, t. j. jestli toto na tri rovné činitele rozložíme. Poneváč ale $3 \times 3 \times 3$ je 27 a $4 \times 4 \times 4$ je už 64, preto jej šírka má viac než 3 a menej než 4 *dm*. Probovaním najdeme, že $\sqrt[3]{35} = 3.2$

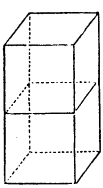
7. Dvoch krychiel či kociek hrany sú 4 *dm* a 5 *dm* dlhé; vyhľadaj hranu takej tretej kocky, ktorej kub. obsah rovná sa tamtým dvom!

Rozl. Poneváč kub. obsah oboch známych kociek, je $4^3 + 5^3$ či $64 + 125$ či 189 dm^3, preto tretej kocky hranu najdeme, jestli z 189 kubičný koreň vyhľadáme $\sqrt[3]{189} = 5.7$. Otáznej kocky hrana je tedy asi 5.7 *dm* dlhá.

Otázky. 1. *Ktoré* čísla menujeme kubičnými číslami? *Ktoré* čísla menujeme kubičnými koreňami? *Akým* znakom označujeme kubičný koreň? *Ktoré* číslo je kubičný koreň z 8? a z 27? a z 343? *Ako* vyhľadáme kubičný koreň nejakého čísla? *Prečo* menujeme čísla: 1? 8? 27? atď. kubičnými? *Čo* udávajú kubičné čísla? (Kubičný obsah krychiel). *Medzi* ktorými kubičnými číslami leží číslo 50 (medzi 27 a 64). *Medzi* ktorými číslami leží kubičný koreň čísla 50? (medzi 3 a 4).

§ 52. O prismách čili hranoloch.

Postavíme-li základnými plochami, jednu na druhú, dve shodné kocky (*Obr. 160.*) obdržíme tak zvanú *prismu* čili *hranol*. Ako na kocke, podobne rozoznávame i na prisme základné a bočné plochy či strany. Na obr. 160. znázornenej prismy, základné plochy či strany sú štvorce a bočné plochy obdĺžniky, počtom štyri. Ako jej základné tak i jej bočné strany sú shodné, a síce prvé dve sú shodné štvorce, posledné štyri sú shodné obdĺžniky.



Obr. 160.

Krem strán pozorujeme na otáznej prisme i hrany, a síce hore a dolu štyri (základné) a zôkol vôkol štyri (bočné hrany). Otázna prisma má tedy úhrnom dvanásť hrán. Ako základné tak i bočné hrany sú medzi sebou rovnaké. Považime-li jej ktorékoľvek dve protistojné strany a ktorékoľvek dve protistojné hrany, zkúsime, že sú rovnobežné.

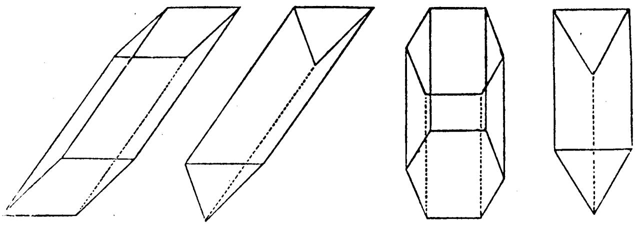
Poneváč jej bočné hrany stoja na základnej ploche kolmo, preto menujeme ju *prímou* či *prostou* (kolmou) prismou, a poneváč má štyri bočné strany, preto menujeme ju *štvorstranou* (či i *štyrhrannou*) prismou.

Tohoto spôsobu prismu ešte i tak obdržíme, jestli nejakú štvorcovú plochu (na pr. štvorcu podobný kus papieru) rovnobežne so samou sebou a kolmo do hora v mysli pohybujeme. Táto štvorcom opísaná cesta, predstavuje tiež tejto podoby štvorstrannú prismu.

Pohybujeme-li podobne, t. j. do hora kolmo a rovnobežne so samou sebou inej podoby plochu, na pr. obdľalníkovej, kosoštvorcovej, kosoďalníkovej podoby, alebo trojuhelníkovú a vôbec akúkoľvek mnohouhelníkovú plochu, predstavujú nimi opísané cesty tiež príme či kolmé prismy.

Tak na pr. týmto spôsobom obdľalníkovej podoby plochou opísaná cesta, predstavuje prímu prismu, ktorej ako základné tak i bočné plochy sú obdľalníky.

Podobne, trojuhelníkovou plochou opísaná cesta znázorňuje taký prímy či kolmý hranol, ktorého dve základné plochy sú shodné trojuhelníky a bočné strany obdľalníky. *Obr. 161.* I.



Obr. 161.

U všetkých týmto spôsobom povstalých prisiem stoja bočné hrany na základnej ploche kolmo, a preto sú všetky *príme* prismy, a dľa počtu bočných strán: trojstranné, štvorstranné atď.

Otázne troj-, štvor- a vôbec mnohouhelníkové plochy možno avšak nie len kolmo lež i kosmo do hora (na pr. v pravo alebo v ľavo) a rovnobežno so samo sebou pohybovať. V tomto prípade obdržíme prismy, ktorých ako základné plochy, tak i bočné a základné hrany sú síce rovnobežné, ktorých ale bočné hrany nestoja na základných kolmo lež *kosmo.* Tohoto spôsobu prismy menujeme *kosmými* prismami. (Obr. 161. III., IV.)

Zo všetkého tu povedaného vyplýva: že *prisma je také teleso, ktorého dve základné plochy sú shodné a rovnobežné prímočiarne figury a ktorého bočné plochy či strany sú samé rovnobežníky,* a že dľa počtu strán rozoznávame: troj-, štvor-, päťstranné atď. alebo tri-, štyri-, päťhranné a čo do polohy príme a kosmé prismy.

Prismu, u ktorej základné plochy sú rovnobežníky, menujeme ináčej i *rovnobežnostranom* (parallelepipedon). I tento môže byť prímy alebo kosmý.

Taký prímy rovnobežnostran, alebo i rovnobežnosten, u ktorého základné plochy sú pravouhelné rovnobežníky, menujeme *pravouhelným* rovnobežnostranom, a taký, u ktorého všetky hrany sú rovnaké· kockou či krychľou.

Príme prismy, ktorých základné plochy sú pravidelné figury na pr. pravidelné troj-, štvor-, päť-, šesťuhelníky, menujeme *pravidelnými* prismami či stĺpami. U pravidelných prisiem sú ako základné a bočné plochy, tak i (telesové) uhly shodné. Obr. 160 a obr. 161. I. a II. predstavujú pravidelné prismy. Prečo?

Úlohy. 1. Pohybuj v mysli kolmo do hora a rovnobežno so samo sebou plochu, (papier) pravidelnému šesťuhelníku podobnú!

Akú prismu predstavuje ňou opísaná cesta? *Prečo* menujeme túto prismu pravidelnou? *Koľko* strán a hrán má otázna prisma? (Obr. 161 II.).

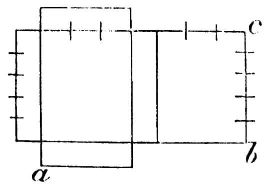
2. Pohybuj v mysli túto istú plochu rovnobežno síce, so samo sebou avšak kosmo na pr. z prava v ľavo!

Akú prismu predstavuje teraz ňou opísaná cesta? *Prečo* je táto prisma nie pravidelná! *V čom* srovnáva sa s predešlou? a v čom líši od nej?

Otázky. *Koľko* základných plôch má každá prisma? *Aké* sú tieto plochy čo do polohy? *Aké* obrázce či figury sú bočné strany prisiem? *Ako* menujeme tú prímu prismu, ktorej dve základné plochy sú obďalníky? *Ktorá* plocha opíše takúto prismu, jestli ju kolmo do hora pohybujeme? *Ktoré* prismy menujeme prímymi? a ktoré kosmými? *Akú* prismu opíše kosoďalníková plocha, jestli ju kolmo do hora? a jestli ju kolmo do hora pohybujeme? *Ktorá* plocha opíše pravidelnú osmistrannú prismu? *Akú* prismu predstavujú múry domu? obrezaná doska? kystňa? priestor izby? *Ktoré* prismy menujeme pravidelnými? atď.

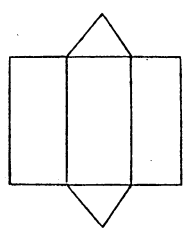
§ 53. O vymeriavaní povrchu prisiem.

Sostavíme-li, ako u kocky (viď § 51.), všetky plochy nejakej prismy jednu k druhej, tak, že bočné ležia jedna pri druhej v jednom rade a dve základné hore a dolu pod nimi: obdržíme tak zvanú *sieť* otáznej prismy. Táto sieť predstavuje jej celý povrch. Tak na pr. *obr. 162* predstavuje sieť prímej pravouhelnej rovnobežnostrannej prismy či pravouhelného rovnobežnostranu aký na pr. tehla znázorňuje. Sieť táto pozostáva zo štyroch jeden pri druhom ležiacich a dvoch nad týmito sa nachodiacich obďalníkov. Prvšie štyri predstavujú jej bočné a dva posledné jej základné plochy. Štvorcový obsah bočných štyroch obdľalníkov najdeme, jestli ich celú dĺžku *ab* šírkou *bc* násobíme či jestli obvod prismy výškou násobíme. (Litera *a* stojí na obrazci chybne, má stáť u prvého uhlu v ľavo.) Pridáme-li k tomuto násobku ešte i štvorcový obsah oboch základných plôch, obdržíme štvorcový obsah celého jej povrchu. Má-li na pr. dĺžka *ab* či celý obvod prismy 8 *cm* a jej výška *bc* 5 *cm*, tedy je štvocový obsah všetkých bočných plôch či strán 5×8 či 40 cm^2. Má-li ďalej dĺžka základnej plochy 3 *cm* a šírka 1 *cm*, tedy je štvorcový obsah jednej 3 cm^2 a oboch 6 cm^2. Celý povrch otáznej prismy tedy $40 + 6$ či 46 cm^2.



Obr. 162.

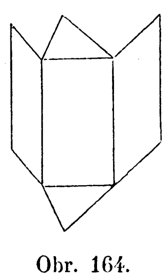
Nasledujúci *obr. 163* znázorňuje sieť trojstrannej *prímej* prismy. Aj tejto celý povrch ako predošlej najdeme, jestli jej obvod výškou násobíme, a k tomuto násobku potom ešte štvorcový obsah oboch základných plôch či oboch trojuhelníkov pridáme.


Obr. 163.

Už z týchto dvoch príkladov dostatočne vysvitá, že *povrch nejakej prímej prismy, tohoto štvorcový obsah vôbec najdeme, jestli jej obvod výškou násobíme a k tomuto násobku štvorcový obsah oboch základných plôch pridáme.* Týmto spôsobom možno avšak len prímych prisiem celý povrch vypočtovať. Kosmých prisiem bočné strany majú rozdielnu výšku a len obe základné plochy sú i u týchto shodné. A preto *celý povrch kosmej prismy najdeme, jestli štvorcový obsah tých bočných strán, ktoré majú rozdielnu výšku o sebe vyhľadáme a ku súčtu zo všetkých bočných strán dve základné plochy* t. j. ich štvorcové obsahy *pridáme. Obr. 164* predstavuje sieť trojstrannej kosmej prismy.

Úlohy. 1. Nejaký prímy a pravouhelný rovnobežnostran, (ako na pr. tehla) je: 42 *cm* dlhý, 30 *cm* široký a 24 *cm* vysoký; koľký je celý jeho povrch?

Rozl. Poneváč je 42 *cm* dlhý a 30 *cm* široký obnáša jeho celý obvod 144 *cm*; a poneváč je 24 *cm* vysoký, majú všetky jeho bočné plochy 144×24 či 3456 cm^2. Keďže ale dĺžka základnej plochy má 42 *cm* a šírka 30 *cm*, má jedna zo základných plôch 42×30 či 1260 cm^2 a obe 2520 cm^2. Celý jeho povrch, má tedy $3456 + 2520 = 5976$ cm^2.


Obr. 164.

2. Nejakého prímeho a 1 *m* 2 *dm* vysokého stĺpu základná

plocha je pravidelný šesťuhelník so stranami 1 *m* 2 *dm* veľkými; koľký je jeho celý povrch?

Rozl. Poneváč základnej plochy jedna strana má 1 *m* 2 *dm* či 12 *dm*, tedy celý obvod otázneho stĺpu je 6×12 či 72 *dm*; a poneváč tenže stĺp je 14 *dm* vysoký, tak štvorcový obsah všetkých bočných strán obnáša 14×72 či 1008 dm^2.

Chceme-li teraz i štvorcový obsah jednej zo základných plôch vyhľadať, musíme celý pravidelný šesťuhelník, počnúc od jeho stredobodu na šesť trojuhelníkov rozdeliť a týchto štvorcový obsah vypočítať. K vyhľadaniu štvorcového obsahu nejakého trojuhelníka, avšak musíme znať jeho základnú stranu a jeho výšku. Základná strana má, ako už známe 12 *dm*; výšku ale vyhľadáme, jestli z jeho vrcholu kolmú na základnú spustíme, a túto vypočítame. Otázna kolmá delí každý z týchto trojuhelníkov na dva pravouhelné (Viď § 39.). Poneváč otázne trojuhelníky sú rovnostranné, preto je hypotenusa u každého z týchto pravouhelných trojuhelníkov toľká ako strana či 12 *dm* dlhá, jedna z katét má ale polovic toľko či 6 *dm*. Druhá katéta či výška, dľa Pythagorovej poučky má $\sqrt{12^2-6^2}$ či $\sqrt{108} =$ 10.3 *dm*. Dľa tohoto štvorcový obsah jednoho z týchto pravouhelných trojuhelníkov je $\frac{12 \times 10.3}{2} = 61.8$ dm^2 a štvorcový obsah všetkých šesť $= 6 \times 61.8 = 370.8$ dm^2. Obe základné plochy majú tedy $2 \times 370{\cdot}8$ či 741.6 dm^2. Otázna výška predstavuje i diaľku strán od stredobodu. Poneváč ale štvorcový obsah pravidelného mnohouhelníka i tak najdeme, jestli jeho polobvod touto dialkou násobíme, preto štvorcový obsah jednoho z týchto šesťuhelníkov je 36×10.3 či tiež 370.8 dm^2 a oboch 2×370.8 či 741.6 dm^2. Celý povrch otázneho stĺpu ale, $1008 + 741.6 = 1749.6$ dm^2.

3. Koľko m^2 bľachy potrebujeme k shotoveniu nejakej 0.8 *m* dlhej, 0.6 *m* širokej a 0.4 *m* vysokej truhličky bez vrchnáka?

Rozl. Na základnú plochu treba 0.8×0.6 či 0.48 m^2; na prednú a zadnú stenu $2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.48$ m^2; na obe bočné steny $2 \times 0.8 \times 0.4$ či 0.64 m^2. Na celú truhličku $0.48 + 0.48 + 0.64$ či 1.60 dm^2.

4. Nejakej štvor- a pravouhlastej 2.5 *m* dlhej, 2 *m* širokej a 1.4 *m* vysokej jamy, spodok chceme vyložiť kvadrami, boky hrubými doskami; koľko m^2 kvadár a koľko m^2 dosák treba k tomu?

Rozl. Kvadár treba 2×2.5 či 5.0 m^2 a dosák: $2 \times 2 \times 1.4 + 2 \times 2.5 \times 1.4$ či 12.60 m^2.

5. Nejaká príma trojstranná 2 *m* 4 *dm* vysoká prisma má za základné plochy rovnostranné trojuhelníky so stranami 1·4 *dm* dlhými; koľký je jej celý povrch?

Rozl. Poneváč obvod otáznej prismy má 4.2 *dm* a výšku 24 *dm*, preto štvorcový obsah všetkých troch bočných strán učiní 24×4.2 či 100.8 dm^2. A poneváč jedna strana základného trojuhelníka má 1.4 *dm*, pripadne na polovicu strany 0.7 *m*, následkom čoho výška otázneho trojuhelníka má $\sqrt{1.4^2-0.7^2}$ či $\sqrt{1.47} = 1.2$ *dm*. Štvorcový obsah jednoho trojuhelníka $\frac{1.4 \times 1.2}{2} = 0.84$ *dm*². Celý povrch: $100.8 + 1.68 = 102.48$ *dm*².

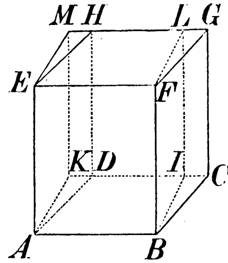
§ 54. O vymeriavaní kub. obsahu prisiem.

Kubičný obsah prímych a pravouhelných prisiem či pravouhelných rovnobežnostranov možno podobne ako kub. obsah kociek vymerať a vypočítať. (Viď § 51.) Aj tu vymeriame najsamprv základnú plochu a vyslovíme jej štvorcový obsah alebo v *m*²-och, alebo v *dm*²-och alebo v *cm*²-och následkom čoho hneď vyzvieme, koľko kubičných metrov, poťažne *dm*³-ov alebo *cm*³ možno na ňu jedno ku druhému postaviť. Potom vymeriame jej výšku a vyslovíme v toho istého pomenovania jednotkách dĺžčej miery, v ktorých sme jej šírku a dĺžku vyslovili. Násobok zo základnej plochy a výšky udáva potom počet kubikov v celej prisme sa nachodiacich, či jej kubičný obsah.

Tak na pr. je-li šírka nejakej prímej a pravouhelnej štyristrannej prismy 3 *dm* a dĺžka 4 *dm*, má jej základná plocha 3×4 či 12 *dm*². Na toľkúto plochu možno 12 *dm*³-ov jeden k druhému postaviť. Má-li potom jej výška na pr. 8 *dm*, obsahuje celá prisma 8 takýchto vrstiev či 8×12 *dm*³ či 96 *dm*³-ov, to je i jej kubičný obsah.

Tento istý kubičný obsah i tak obdržíme, jestli ako šírku tak i dĺžku a výšku otáznej prismy v rovnopomenovaných jednotkách dĺžčej miery vyslovíme a tieto tri rozmery ako nepomenované čísla jedno s druhým násobíme, obdržaný násobok znamená potom kubiky toho pomenovania akého pomenovania bola jej dĺžka, šírka a výška.

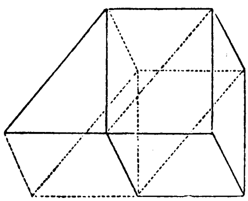
Toto isté pravidlo platí i v tom prípade, jestli otázna prisma, má za základné plochy kosmé rovnobežníky, bo tejto podoby prismu možno vždy na pravouhelnú a tej istej veľkosti premeniť. Tak na pr. odsekneme-li z prímej prismy *ABCDEFGH obr. 165.*, ktorej základné plochy sú kosmé rovnobežníky, kolmou plochou *BILF* pozdĺž hrany *BF*, trojstrannú prismu *BCIFGL* a priložíme-li ju z ľava ku ploche *ADHE*, obdržíme prímu pravouhelnú prismu *ABIKEFLM*, ktorá má s predešlou rovnakú základnú stranu a rovnakú výšku a preto rovnaký kub. obsah.



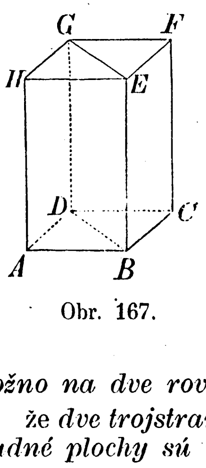
Obr. 165.

Z tohoto vyplýva, že *štvorstranné príme prismy, ktoré majú rovnakú* (čo priam nie shodnú) *základnú plochu a rovnakú výšku, majú i rovnaký kubičný obsah,* a že i *nepravouhelnej štvorstrannej prímej prismy kub. obsah najdeme, jestli základnú plochu výškou násobíme.*

Čo sme ohľadom vyhľadania kub. obsahu o prímych štvorstranných prismách povedali, to isté platí i o kosmých štvorstranných prismách, bo tieto možno vždy na príme štvorstranné prismy tej istej veľkosti premeniť, ako to *obr. 166.* znázorňuje. Presekneme-li nejakú kosmú štvorstrannú prismu cez dve oprotné základné hrany idúcou plochou, obdržíme jej dve rovné polovice. Priložíme-li jednu z týchto polovíc na pr. pravú v ľavo k pozostalej druhej polovici, obdržíme prímu štvorstrannú prismu, ktorá má s predešlou rovnú základnú stranu a rovnú výšku a preto i rovný kub. obsah, čo i z toho vyplýva, že obe prismy pozostávajú z tých istých dvoch polovíc. Z tohoto vyplýva, že: *kosmej štvorstrannej prismy kub. obsah najdeme, jestli základnú stranu výškou násobíme.* Pod výškou kosmej prismy rozumieme s vrchnej základnej strany na spodnú základnú (alebo jej predĺženinu) spustenú kolmú.


Obr. 166.

Presekneme-li štvorstrannú prismu *ABCDEFGH* kolmou, cez protistojné bočné hrany *BE* a *GD* idúcou plochou *BEGD (Obr. 167.)* rozpadne sa na dve trojstranné rovnej veľkosti prismy, *ABDHEG* a *BCDEFG*. Otázna kolmá delí totiž i základné strany na dva shodné trojuhelníky *ABD* a *BCD*. A poneváč celá základná plocha násobená výškou znamená celej prismy kub. obsah, tedy polovica základnej plochy násobená tou istou výškou, musí polovicu jej kub. obsahu či kub. obsah jednej z týchto trojstranných prisiem znamenať.



Obr. 167.

Tomuto podobné zkúsime, jestli kosmú štvorstrannú prismu, ktorej základné plochy sú rovnobežníky, podobne na dve trojstranné prismy rozdelíme. Z tohoto vyplýva:

že *štvorstranné príme i kosmé prismy, ichžto základné plochy sú rovnobežníky, možno na dve rovnaké trojstranné prismy rozložiť a naopak,*

že *dve trojstranné prismy ichžto výšky sú rovné a ichžto základné plochy sú shodné trojuhelníky, jedna k druhej posta-*

vené, tvoria dovedna jednu štvorstrannú prismu, dvakrát toľkú ako je jedna z nich; a

že *i trojstrannej prismy kub. obsah najdeme, jestli jej základnú plochu výškou násobíme.*

Ako štvorstrannú, podobne možno i päť-, šesť- a vôbec viacstrannú prismu, rovnými, cez bočné hrany idúcimi plochami na samé trojstranné prismy rozložiť. Poneváč ale každej trojstrannej prismy kub. obsah najdeme, jestli základnú plochu výškou násobíme, preto z dvoch, troch alebo viac trojstranných prisiem pozostávajúcej, koľkokoľvek strannej prismy kub. obsah najdeme, jestli, všetkých trojstranných prisiem základné strany, týchto súčet, t. j. *celú základnú plochu otáznej prismy spoločnou výškou* (alebo dĺžku, šírku a výšku jedno s druhým) *násobíme.*

Zo všetkého o vyhľadávaní kub. obsahu prímych a kosmých prisiem tu povedaného vyplýva, že *kub. obsah akejkoľvek prismy najdeme, jestli jej základnú plochu výškou násobíme.*

Taktiež, že prismy, ktorých základné plochy t. j. týchto štvorcové obsahy a výšky sú rovnaké, majú rovnaký kub. obsah.

Podobne, počtovaním možno sa presvedčiť, že dve prismy, z ktorých jedna má dvakrát toľkú základnú plochu, avšak polovic menšiu výšku, než druhá, alebo naopak sú tiež rovnaké.

Majú-li dve prismy nerovnaké základné plochy avšak rovnakú výšku, tenkráť stoja v tom pomere jedna k druhej, ako ich základné plochy t. j. týchto štvorcové obsahy. Tak na pr. má-li základná plocha jednej 8 m^2 a druhej 2 m^2 a výška oboch 5 *m*, tedy stoja ich kub. obsahy v tom pomere jeden k druhému ako 8 : 2 či 4 : 1, t. j. tá prvá má štyrikrát väčší kub. obsah, než posledná.

Podobne, dve prismy, ktoré majú rovnaké zákl. plochy a nerovnaké výšky, stoja v tom pomere jedna k druhej, ako ich výšky.

Sú-li u dvoch prisiem ako základné plochy, tak i výšky nerovné, tedy stoja jedna k druhej v tom pomere, ako ich násobky zo základnej plochy a výšky, alebo ako ich násobky, zo šírky, dĺžky a výšky.

Poneváč u kocky všetky tri rozmery sú rovnaké, preto kub. obsahy dvoch kociek stoja v tom pomere jeden k druhému, ako *kubičné čísla ich hrán.* Tak na pr. má-li jedna hrana nejakej kocky 4 *cm* a druhej 2 *cm*, tedy stoja ich kub. obsahy v tom pomere jeden k druhému, ako $4^3 : 2^3$ či ako 64 : 8 alebo 8 : 1.

Úlohy. 1. Vyhľadaj kub. obsah, nejakej, 1 *m* 6 *dm* dlhej, 1 *m* 2 *dm* širokej a 2 *m* vysokej, štvorstrannej prismy!

Odp. 16 × 12 × 20 či 3840 dm^3 či 3 m^3 840 dm^3.

2. Nejaká 4 *m* vysoká príma prisma má za základnú plochu 24 *cm* dlhý štvorec; koľký je jej kub. obsah?

Odp. 24 × 24 × 400 či 230400 cm^3 či 230 dm^3 a 400 cm^3

3. Nejakého štvorstranného pravouhelného súseka, dĺžka má 3 *m*, šírka 1 *m* 2 *dm* a výška 1 *m* 4 *dm*; koľko hektolitrov obilia vmestí sa doň?

Rozl. Kub. obsah otázneho súseka má 30 $\times$ 12 $\times$ 14 či 5040 dm^3. Poneváč každých 100 dm^3 je 1 *hl*, preto vmestí sa doň 50.40 *hl.*

4. Koľko 32 *cm* dlhých, 16 *cm* širokých a 8 *cm* hrubých tehál treba na nejaký 20 *m* dlhý 2 *m* 4 *dm* vysoký a 8 *dm* hrubý múr? jestli hrúbka vakovky je už v to počítaná?

Rozl. Najprv vypočítame kub. obsah celého múru. Tento má 200 $\times$ 24 $\times$ 8 či 38400 dm^3. Potom kub. obsah jednej tehly. Táto má 32 $\times$ 16 $\times$ 8 či 4096 cm^3. Koľkokráť 4096 v 38400000 nachodí sa toľko tehál. Odp. 9375 tehál.

5. Nejakej 8 *dm* dlhej a 5 *dm* širokej štvoruhlastej kystni kub. obsah je 120 dm^3; koľká je jej hĺbka či výška?

Rozl. Poneváč kub. obsah rovná sa násobku zo základnej plochy a výšky, tedy túto poslednú najdeme, jestli kub. obsah základnou plochou delíme. Odp. 120 : 40 = 5 *dm.*

6. Jestli 1 dm^3 kamenného uhlia váži 1.275 *kg*; koľko váži 3 *m* dlhá 2 *m* široká a 12 *dm* vysoká kamenným uhlím naplnená truhlica? Odp. 30 $\times$ 20 $\times$ 12 $\times$ 1.275 = 9180 *kg.*

7. Nejakého šesuhlastého a 6 *m* dlhého stĺpu, základná plocha je pravidelný šesťuhelník, so stranami 2 *dm* veľkými; koľký je jeho kub. obsah?

Rozl. Rozložíme základnú plochu na šesť rovnostranných trojuhelníkov, vyhľadáme ich výšku $= \sqrt{(2^2 - 1^2)}$ či $\sqrt{3} = 1.7$; a štvorcový obsah jedneho: $\frac{2 \times 1.73}{2} = 1.73$ dm^2; štvorcový obsah všetkých = 6 $\times$ 1.73 či 10.38 cm^2. Kub. obsah celého stĺpu = 60 $\times$ 10.38 = 622.80 dm^3.

8. Nejaký šop, majúci podobu trojstrannej prismy, je 52 *dm* široký, 48 *dm* vysoký a 8 *m* 4 *dm* dlhý; koľko *kg* sena vmestí sa doň, jestli 114 *kg* sena zaujme 1 m^3 veľký priestor?

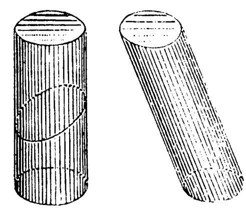
Rozl. Základná plocha je 52 *dm* široký a 48 *dm* vysoký trojuhelník. Jej štvorcový obsah $= \frac{52 \times 48}{2}$ či 1248 dm^2. Kub. obsah celého šopu = 1248 $\times$ 84 = 104832 dm^3 či 104.832 m^3. Poneváč do 1 m^3 veľkého priestoru vmestí sa 114 *kg*, tedy do 104.832 m^3, vmestí sa 104.832 $\times$ 114 či 11950.848 *kg* t. j. 119 *q* 50 *kg.*

9. Nejaká 12 *m* dlhá priekopa, má na svojich oboch koncoch, za hraničné plochy rovnostranné lichobežníky, jichžto stredná šírka je 6 *dm* a výška 8 *dm*; koľký je jej kub. obsah?

Rozl. Poneváč celá priekopa predstavuje ležiacu prismu, preto jej kub. obsah najdeme, jestli základnú plochu (štvorcový obsah lichobežníka) výškou (dĺžkou) násobíme. Štvorcový obsah lichobežníka = 6 $\times$ 8 či 48 dm^2. Kub. obsah prismy či celej priekopy = 48 $\times$ 120 či 5760 dm^3.

§ 55. Znázornenie valca (cylindra).

Pod valcom rozumieme také teleso, ktorého obe základné plochy sú rovnobežné kruhy či kruhové plochy a ktorého bočná plocha je do sebe uzavretá krivá plocha. (*Obr 168.*) Poneváč valec je rovnohrubé teleso, preto možno ho za takú prismu považovať, ktorej obe základné plochy sú kruhy či kruhové plochy. Príklad valca, podáva, val v stupách, mlynský kameň, válok ktorým cesto valkáme atď. Dutý valec menujeme cylindrom. Takýto valec predstavujú litrové nádoby, rúry na pecach, na vodovodoch atď. Bočnú krivú plochu valca menujeme *valcovým plášťom*. Spojíme-li oba stredobody základných plôch valca prímkou, obdržíme takzvanú *os* valca. Dialka vrchnej základnej plochy od spodnej, predstavuje výšku valca.



Obr. 168.

Stojí-li os valca na základnej ploche kolmo, menujeme ho *prímym*, stojí-li kosmo, menujeme ho kosým alebo *kosmým* valcom.

Prímy valec povstane, jestli sa kruhová plocha rovnobežne so samo sebou a kolmo do hora pohybuje. Ňou opísaná cesta predstavuje prímy valec. Pohybuje-li sa otázna plocha rovnobežne síce so samo sebou, avšak nie kolmo lež v pravo alebo v ľavo do hora, predstavuje ňou opísaná cesta kosmý valec.

Je-li os prímeho valca toľká, ako priemer základnej plochy, tenkráť menujeme ho *rovnostranným valcom*.

Kosmé valce majú častokráť za základné plochy ellipsy.

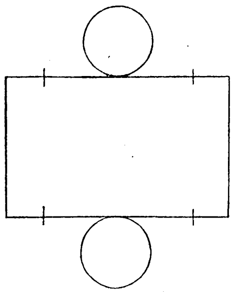
Presekneme-li valec nejakou rovinou priekom kolmo na os, je priesečná plocha kruh, presekneme-li ho kosmo na os, je priesečná plocha ellipsa. Mäsiari a kupci krájajú salámy a klbásy kosmo na os preto, aby sa okružky zdaly byť väčšími.

Úlohy. Vystrihni z papieru kruhovú plochu a pohybuj ju rovnobežne so samo sebou kolmo do hora! kosmo do hora!

Aké teleso predstavuje ňou opísaná cesta v prvom prípade? v druhom prípade? Čo rozumieme pod osou? pod plášťom? pod výškou? pod priesečnou plochou valca? ktorý valec menujeme prímym? kosmým? rovnostranným?

§ 56. O vymeriavaní povrchu valca.

Rozvinieme-li bočnú plochu či plášť nejakého prímeho valca, obdržíme obdľalník, ktorého základná strana či dĺžka rovná sa obvodu a šírka výške valca. Obe základné plochy valca, sú kruhoplochy *(Obr. 169.)* Chceme-li sieť nejakého prímeho valca sostrojiť, opíšeme polmerom základnej plochy kruh, načiarame naň tečnicu $3^1/_7$-krát dlhšiu, než je priemer načiaraného kruhu, a sostrojíme nad ňou obdĺalník, ktorého šírka rovná sa výške valca. Konečne, na oprotnej strane obdĺalníka opíšeme, tým istým polmerom, čo predtým, druhý kruh.



Obr. 169.

Poneváč bočná plocha valca rovná sa obdĺalníku a poneváč tohoto štvorcový obsah najdeme, jestli dĺžku šírkou násobíme, preto bočnú plochu či *plášť valca vyhľadáme, jestli obvod jeho základnej plochy výškou násobíme.*

Znači-li r polmer základnej kruhovej plochy a v výšku valca, tedy je štvorcový obsah plášťa $= 2r\pi \times v$.

Tak na pr. je-li $r = 2$ *cm* a $v = 5$ *cm*, je štvorcový obsah plášťa $= 2 \times 2 \times 3.14 \times 5 = 62.80$ *cm*^{2}.

Pridáme-li k plášťu valca ešte i obe základné plochy, obdržíme celý jeho povrch.

Povrch celého valca $= 2r\pi \times v + 2r^2\pi = 2\, r\pi\,(v + r)$.

Celý povrch predošlého valca je dľa tohoto $= 62.80$ *cm*^{2} $+ 2 \times 4 \times 3.14$ či 87.92 *cm*^{2}.

Úlohy. 1. Nejakého valca základnej plochy priemer je 6 *dm* a výška 3 *m*; koľký je jeho celý povrch?

Rozl. $2 \times 3 \times 3.14 \times 30 + 2 \times 3 \times 3 \times 3.14 = 565.20 + 56.52 = 621.72$ *dm*.

2. Vypočítaj plášť takého rovnostranného valca, jehož výška (alebo priemer základnej plochy) má 2 *m*!

Odp. $2\, r\pi.v = 2 \times 1 \times 3.14 \times 2 = 12.56$ *m*^{2}.

3. Koľko bľachy treba na 8 *dm* dlhú pecovú rúru, jejžto priemer má 2 *dm*.

Odp. $2 \times 1 \times 3.14 \times 8 = 50.24$ *dm*^{2}.

4. Nejakého teremu sklepenia je dutý polvalec, jehož dĺžka má 20 *m* a priemer 6 *m*; koľko *m*^{2} obnáša jeho vnútorná plocha?

Odp. $2 \times 3 \times 3.14 \times 20 : 2 = 188.40$ *m*^{2}.

Poneváč plášť valca rovná sa násobku z obvodu základnej plochy a výšky, preto výšku nejakého valca najdeme, jestli štvorcový obsah plášťa obvodom základnej plochy rozdelíme.

Poneváč plášť či $p = 2\, r\pi \times v$, preto

$$v = p : 2\, r\pi.$$

A podobne obvod základnej plochy najdeme, jestli štvorcový obsah plášťa výškou rozdelíme

$$\text{Obvod či } 2\, r\pi = p : v.$$

5. Jestli plášť nejakého prímeho valca má 60.6 dm^2 a priemer základnej plochy 2 dm; koľká je jeho výška?
Odp. 60.60 : 6.28 = 9.64 dm.

§ 57. O vymeriavaní kubičného obsahu valca.

Keďže kružnica predstavuje, pravidelný, nekonečne mnoho strán majúci mnohouhelník, preto i valec možno považovať za pravidelnú nekonečne mnohostrán majúcu prismu, a preto jeho kubičný obsah, práve tak ako i prismy najdeme, jestli jeho základnú plochu výškou násobíme. Ponevač základná plocha valca je kruhoplocha a tejto štvorcový obsah je $r^2\pi$, preto

kub. obsah prímeho valca $= r \times r \times \pi \times v$ či $r^2\pi . v$ (v = výška).

Tak na pr. má-li priemer základnej plochy u nejakého valca 4 dm a výška 8 dm, je jeho

kubičný obsah $= 2 \times 2 \times 3.14 \times 8 = 100{\cdot}48$ dm^3.

Ponevač ale kubičný obsah valca rovná sa násobku zo základnej plochy a výšky, preto výšku nejakého valca najdeme, jestli jeho kubičný obsah základnou plochou delíme.

$$v = \frac{\text{kub. ob.}}{r^2\pi} = \frac{k}{r^2\pi}.$$

Tak na pr. má-li nejaký valec 251.20 dm^3 a základná jeho plocha 12.56 dm^2, je jeho výška = 251.20 : 12.56 = 20 dm.

Z kubičného obsahu a výšky možno polmer valca, dľa nasledujúcej formulky vyhľadať: $r = \sqrt{\frac{k}{\pi v}}$. K = kubičný obsah.

Tak na pr. posledného valca kubičný obsah = 251.20, výška = 20 dm

$$r = \sqrt{\frac{251.2}{3.14 \times 20}} = \sqrt{4} = 2.$$

Kubičný obsah *steny* u nejakého dutého valca, (na pr. nejakej železnej dutej rúry), vyhľadáme, jestli z kubičného obsahu celého valca, sťa by bol celistvý, kubičný obsah jeho dutiny odčítame.

Kubičný obsah nádob s elliptičným dnom, možno dľa nasledujúcej formulky vyhľadať: $a \times b \times \pi \times v$ t. j. základná plocha ellipsy $\times$ výška.

V tejto formulke značí a polovicu veľkej, b polovicu malej osi a v výšku. (Viď § 11.).

Je-li na pr. $a = 8$ dm, $b = 3$ dm a $v = 10$ dm, tedy je kubičný obsah otáznej nádoby $= 8 \times 3 \times 3.14 \times 10 = 753.60$ dm^3 = 753 l a 60 cl.

Kubičný obsah valcu podobných telies alebo priestorov na pr. kubičný obsah diež a sudov *približeno* vyhľadáme, jestli zo súčtu ich najmenšieho a najväčšieho priemeru polovicu vezmeme. a tomuto priemeru zodpovedajúcu kruhovú plochu výškou otázneho telesa násobíme.

Tak na pr. má-li priemer nejakého sudu u dna 40 *cm* a u vránky 48 *cm*, tedy obnáša polovica z ich súčtu: $\frac{40 + 48}{2} = 44$ *cm*.

Tomuto priemeru zodpovedá: $22 \times 22 \times 3.14$ cm^3 veľká kruhová plocha. Toto je základná plocha so sudom priblíženo rovnoveľkého valca. Je-li diaľka oboch dien jednoho od druhého 80 *cm*, tedy je kubičný obsah celého suda asi:

$22 \times 22 \times 3.14 \times 80 = 121780.80$ cm^3 či 121.780 dm^3 či 121 litrov a 78 *cl*.

Ešte priblíženejšie kubičný obsah obdržíme, jestli za priemer otáznej kruhovej plochy: z dvojnásobného priemeru na vránke a z jednoduchého priemeru na dne, tretinu vezmeme: $\frac{2 \times 48 + 40}{3} = 42.$

Podobne možno i kubičný obsah dieže vypočítať.

Presekneme-li nejaký kosmý valec s elliptičnými základnými plochami, rovinou, priekom a kolmo cez jeho os idúcou, obdržíme za priesečnú plochu, kruh. Násobíme-li tohoto plochu, dĺžkou celej osi obdržíme, kubičný obsah otázneho valca.

O pravdivosti tohoto veľmi snadno sa presvedčíme, jestli preseknutím valca obdržané dva kusy, ich elliptičnými základnými plochami dovedna složíme. Týmto spôsobom povstane prímy valec, jehož základná plocha je toľká, ako otázna priesečná kruhoplocha a výška zas toľká ako os kosmého valca.

Úlohy. 1. Nejakého kolmého valca polmer má 3 *dm* a výška 1 *m* 2 *dm*; koľký je jeho kubičný obsah? Odp. $3 \times 3 \times 3.14 \times 12 = 339.12$ dm^3.

2. Jestli kubičný obsah nejakého valca má 3 m^3 a polmer základnej plochy 2 *dm*; koľká je jeho výška?

Rozl. Výšku najdeme, jestli kubičný obsah základnou plochou delíme. 3000 dm^3 : 4×3.14 či 3000 : 12.56 = 238 *dm*.

3. Jestli obvod základnej plochy u nejakého prímeho valca činí 12.56 *dm* a výška 1.5 *m*; koľký je jeho kubičný obsah?

Rozl. Najprv vypočítame z obvodu polmer. $r = 12.56 : 6.28 = 2$, potom základná plocha $= 2 \times 2 \times 3.14 = 12.56$. Túto násobíme výškou $= 12.56 \times 15 = 188.40$ dm^3.

4. V nejakej valcu podobnej, v priemere 12 *dm* majúcej studni, stojí voda na 3 *m* vysoko; koľko *hl*-ov vody nachodí sa v nej?

Rozl. Toľko litrov, koľko otáznou vodou zaujatý priestor má dm^3-ov. Poneváč tento má $6 \times 6 \times 3.14 \times 30$ či 3391.2 dm^3, preto v otáznej studni nachodí sa 3391.2 litrov či 33 *hl* a 91.2 litrov.

5. Koľkú výšku musí mať na 1 liter veľká nádoba, jestli priemer jej dna má 16 *cm*?

Rozl. Výšku najdeme, jestli jej kubičný obsah či 1 dm^3 základnou plochou t. j. $8 \times 8 \times 3.14$-mi rozdelíme. 1000 cm^3 : 200.96 cm^2 = 4.97 cm.

6. Koľký priemer musí mať, na 1 hl veľká nádoba, valcovitej podoby, jestli jej výška je 6.31 dm?

Rozl. Najprv vyhľadáme základnú plochu. Túto najdeme jestli kubičný obsah výškou rozdelíme. 1 hl = 100 dm^3. 100 : 6.31 = 15.84 dm^2 = $r^2\pi$.

Poneváč $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$ (Viď § 40.) tedy polmer otáznej nádoby = $\sqrt{\frac{15.84}{3.14}} = \sqrt{5.04} = 2.23$ dm. Alebo, poneváč $r = \sqrt{\frac{k}{\pi.v}} = \sqrt{\frac{100}{19.81}} = \sqrt{5.04} = 2.23$ dm. Priemer = 4.46 dm.

7. Koľko zlatých stojí nejaký, 8 dm hrubý a 8 m dlhý val do stúp 1 m^3 po 10 zl. rátajúc?

Rozl. Poneváč jeho kubičný obsah učiní $4 \times 4 \times 3.14 \times 80 = 4019.20$ dm^3 či 4.019 m^3, preto stojí tenže 4.019×10 = 40 zl. 19 kr.

8. Koľko tehál treba k zasklepeniu 5 m širokej a 8 m dlhej pivnice, jestli hrúbka múru 4 dm, dĺžka jednej tehly 24 cm šírka 14 cm a výška 8 cm obnáša (v to i maltu rátajúc).

Kubičný obsah 1 tehly = 2688 cm^3 či 2.688 dm^3. Počet tehál = 40629 : 2.688 = 15077.

Rozl. Sklepenie otáznej pivnice predstavuje polovic valca, ktorého priemer i s múrom má 5.8 m, polmer 2.9 m. Kubičný obsah celého valca i s múrom = $2.9 \times 2.9 \times 3.14 \times 8 = 211.259$ m^3. Polvalca = 105.629 m^3.

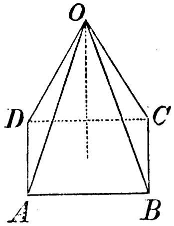
Kubičny obsah celej valcovitej dutiny: $2.5 \times 2.5 \times 3.14 \times 8 = 130$ m^3.

Polvalcovitej dutiny 65 m^3. Kubičný obsah múru = 105.62965 = 40.629 m^3.

§ 58. Znázornenie pyramídy.

Na *obrázci 170.* znázornené teleso, má za základnú plochu, na ktorej stojí štvoruhelník *ABCD*, a za bočné strany, trojuhelníky: *ABO*, *BCO*, *CDO*, *ADO*. Tieto posledné schádzajú sa v jednom bode *O*, ktorý menujeme *vrcholom*. Tohoto spôsobu teleso menujeme *pyramídou*. Poneváč táto pyramída má štyri bočné strany, preto menujeme ju *štvorstrannou*. Ako u druhých uhlastých telies pozorujeme i u pyramídy hrany a uhly. Táto pyramída má štyri bočné a štyri základné hrany, štyri základné a jeden vrcholový telesouhol. S vrcholu O na základnú plochu spustená kolmá, predstavuje jej *pravú* a s vrcholu O ná základnú hranu spustená kolmá jej *bočnú výšku.*

U každej pyramídy sú bočné strany, vždy trojuhelníky, základná ale troj-, štvor-, alebo viac uhelník. Každá pyramída má za bočné strany toľko trojuhelníkov, koľko základná plocha strán.



Obr. 170.

Také pyramídy, u ktorých bočné hrany sú rovnaké, menujeme *rovno bočnohrannými.* Rovnobočnohranné pyramídy, ktorých základná plocha je pravidelný troj-, štvor- alebo viacuhelník, a u ktorých s vrcholu na základnú spustená kolmá (výška) stojí v tohoto stredu, menujeme *pravidelnou* pyramídou. U pravidelných pyramíd sú bočné hrany rovnaké a u základnej plochy ležiace telesové uhly shodné.

Dľa počtu strán, rozoznávame: troj-, štvor-, a viacstranné pyramídy.

Nejaká pyramída na pr. trojstranná povstane, jestli nejaký trojuhelník, ktorému na veľkosti vždy rovnako ubýva, ktorý ale svoju podobu vždy podrží, v jednom a tom istom smere a rovnobežne so samým sebou sa pohybuje, až konečne cele zmizne.

Ponevač každá pyramída, rovne ako ihla, končí sa do ostrého konca, preto menujeme ju po slovenský *ihlancom.*

Úlohy. 1. Vystrihni z papieru jeden rovnostranný a tri rovnoramenné a shodné trojuhelníky ichžto základné strany sú toľké ako u otázneho rovnostranného trojuhelníka strany; postav posledné tri vôkol prvého a skloň ich dovedna tak že sa svojimi ramenami jeden druhého dotýkajú a ich vrcholy v jednom bode schádzajú.

Čo za teleso predstavujú takto složené trojuhelniky? *Koľko* strán má táto pyramída? *Koľko* bočných a koľko základných hrán? *Koľko* uhlov u základnej plochy? *Aké* sú bočné hrany? a otázne uhly? *Akú* figúru predstavuje jej základná plocha? *Prečo* menujeme tohoto spôsobu pyramídu pravidelnou? *Kde* padne podnožie jej výšky? (Do stredu základnej plochy).

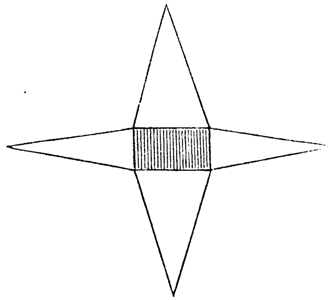
2. Presekni nejakú štvorstrannú pyramídu (na pr. obr. 170) rovinou, cez protistojné dve bočné hrany idúcou!

Na koľko čiastok rozpadne sa otázna pyramída? *Aké* telesá predstavujú tieto dve čiastky? (Trojstranné pyramídy.) *Na koľko* trojstranných pyramíd možno týmto spôsobom: päťstrannú? šesťstrannú pyramídu rozdeliť?

§ 58. O vymeriavaní povrchu pyramídy.

Povrch nejakej pyramídy, predstavuje nám jej sieť. Túto poslednú sostrojíme, jestli najprv jej základnú plochu, a ku tejto každej strane jej zodpovedajúcu bočnú stranu či jej zodpovedajúci trojuhelník, už či v skutočnej veľkosti a či dľa zmenšeného merľuchu nakreslíme. (*Obr. 171.*) Súčet, zo štvorcového obsahu všetkých týchto plôch, predstavuje celý povrch otáznej pyramídy.

Je-li otázna pyramída, ktorej povrch vyhľadávame, pravidelná, tenkráť sú bočné plochy, shodné trojuhelníky. V tom prípade dostačí i len jednoho z bočných trojuhelníkov štvorcový obsah vyhľadať a tento potom s súčtom strán otáznej pyramídy násobiť. Pridáme-li k tomuto násobku ešte štvorcový obsah i základnej plochy, obdržíme celý jej povrch.



Obr. 171.

Úlohy. 1. Nejakej pravidelnej trojstrannej pyramídy, základná strana má 2 m a výška každého, z bočných troch trojuhelníkov 1.5 m; koľký je jej celý povrch?

Rozl. Najprv vyhľadáme štvorcový obsah základnej plochy. Dľa Pythagorovej poučky je jeho výška $\sqrt{(2^2-1^2)} = \sqrt{3} = 1.73$ Štvorcový obsah: $\frac{2 \times 1.7}{2} = 1.73\ m^2$.

Štvorcový obsah jednoho z trojuhelníkov: $\frac{2 \times 1.5}{2} = 1.5\ m^2$; všetkých troch, $3 \times 1.5 = 4.5\ m^2$. Celý jej povrch $= 1.73 + 4.5 = 6.23\ m^2$.

2. Pokrov nejakej väže, predstavuje štvorstrannú a pravidelnú pyramídu, u ktorej dĺžka základných strán je 2.4 m a výška bočných strán či trojuhelníkov je 10.2 m; koľko m^2-ov bľachy treba k jej pokrytiu, jestli na záhyby a odpadky 6% dodáme?

Rozl. Poneváč štvorcový obsah jednoho z otáznych trojuhelníkhov je $\frac{2.4 \times 10.2}{2} = 12.24\ m^2$, preto štvorcový obsah všetkých štyroch je 4×12.24 či $48.96\ m^2$. A poneváč

na záhyby a odpadky na $100\ m^2$ treba dodať $6\ m^2$

tedy na $1\ m^2$ treba dodať $^6/_{100}$ či $0.06\ m^2$

na 48.96 treba dodať 48.96×0.06 či $2.937\ m^2$

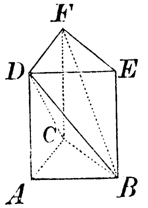
A tak na celý jej pokrov treba $48.96 + 2.937 = 51.897\ m^2$.

§ 60. O vymeriavaní kubičného obsahu pyramídy.

Ako už známe, pyramída povstane, jestli nejaká prímočiarna plocha rovnobežne so samou sebou a v jednom a tom istom smere sa pohybuje, a jestli počas pohybu jej na veľkosti vždy rovnako ubýva pričom ale svoju podobu vždy podržuje, až konečne zmizne.

Pohybujú-li sa týmto spôsobom dva shodné trojuhelníky každý o sebe a každý v druhom smere, oba avšak rovnak vysoko, povstanú dve rovnoveľké pyramídy. Poneváč každému z otáznych trojuhelníkov počas pohybu rovnakö na veľkosti ubýva, musejú i nimi opísané cesty či pyramídy, rovnaký priestor zaujímať.

Na *obr. 172.* znázorená pyramída *(B)ADC*, jejžto základná plocha je trojuhelník *ADC* a vrchol bod *B*, tak povstala, že sa △ *ADC* na hor udaný spôsob až po vrchol *B* pohyboval. Pyramída *(B)DFC*, ktorej základná plocha je △ *DFC* a vrchol bod *B* zas tak povstala, že sa △ *DFC* tým istým spôsobom až po *B* pohyboval. Poneváč oboch týchto pyramíd základné plochy *ADC* a *DFC* sú shodné, bo oba trojuhelníky sú polovice rovnobežníka *ADFC*, a poneváč i oboch výška je rovnaká, preto zaujímajú i rovnaký priestor, či sú rovnaké.



Obr. 172.

Podobne pyramída *(B)DEF*, ktorej základná plocha je △ *DEF*, povstala, že sa △ *DEF* až po vrchol *B*, a pyramída *(D)ABC*, ktorej základná plocha je △ *ABC*, povstala, že sa △ *ABC* až po vrchol *D* na hor udaný spôsob pohyboval. Poneváč obe tieto pyramídy mujú rovnakú výšku a za základné plochy shodné tvojuhelníky *DEF* a *ABC*, preto sú i ich kubičné obsahy rovnaké, či pyramída *(D)ABC = (B)DEF.*

Pyramída *(D)ABC* je však rovnoveľká s *(B)ADC*, bo obe zaujímajú jeden a ten istý priestor. Následkom tohoto sú všetky tieto tri pyramídy či *(B)DFC*, potom *(B)DEF* a *(B)ADC* rovnaké..

Poneváč ale všetky tri dovedna tvoria trojhrannú prismu *ABCDEF*, ktorej základná plocha a výška je toľká ako pyramídy *(D)ABC*, preto je pyramída *(D)ABC* tretia časť takej trojhrannnej prismy, ktorá má s ňou rovnakú základnú plochu a výšku.

Dľa tohoto vysvetlenia, každú trojstrannú pyramídu, možno za tretiu časť či tretinu takej trojhrannej prismy považovať, ktorá má s ňou rovnú základnú plochu a rovnakú výšku. A preto ***kubičný obsah nejakej trojstrannej pyramídy najdeme, jestli jej základnú plochu s tretinou výšky násobíme, alebo jestli základnú plochu výškou násobíme, a z tohoto násobku tretiu časť vezmeme.***

Poneváč, ako už známe, každú štvorstrannú pyramídu možno rovinou, cez jej bočné protistojné hrany idúcou, na dve trojstranné pyramídy rozložiť, preto štvorstrannej pyramídy kubičný obsah najdeme, jestli každej z týchto trojstranných pyramíd, na ktoré sme otáznu štvorstrannú (v mysli) rozložili, kubičný obsah o sebe vyhľadáme a potom dovedna sčítame, alebo jestli celú základnú plochu spoločnou výškou násobíme a z obdržaného násobku tretinu vezmeme. Podobne päťstrannej pyramídy kubičný obsah najdeme, jestli ju v mysli rovinami cez bočné protistojné hrany idúcimi na tri trojstranné rozložíme a týchto kubičné obsahy dovedna sčítame alebo jestli celú základnú plochu spoločnou výškou násobíme a z obdržaného násobku tretiu časť vezmeme.

Týmto spôsobom možno i šesť-, sedem a vôbec viacstrannej pyramídy kubičný obsah vyhľadať. Zo všetkého tu povedaného vyplýva, že *kubičný obsah koľkokoľvek strannej pyramídy najdeme, jestli jej základnú plochu výškou násobíme, a z obdržaného násobku tretiu časť vezmeme alebo, jestli základnú plochu tretinou výšky násobíme.*

$$\textit{Kub. obsah pyramídy} = \frac{\text{základná plocha} \times \text{výška}}{3} = \frac{z.\ \upsilon}{3}$$

Úlohy. 1. Nejakej pyramídy základná plocha má 12 dm^2 a výška 8 dm; koľký je jej kubičný obsah? Odp. 32 dm^3.

2. Nejaká pyramída má za základnú plochu štvorec, jehož každá strana má 1 m 2 dm, bočná výška ale tejže pyramídy či výška niektorého z bočných trojuhelníkov je 14 dm; koľký je jej kubičný obsah?

Rozl. Najprv vyhľadáme jej pravú výšku. Spustíme-li v mysli s vrcholu pyramídy na jej základnú plochu kolmú a podobne, spustíme-li s vrcholu niektorého bočného trojuhelníka na jeho základnú stranu druhú kolmú, predstavuje tamtá kolmú pravú výšku a táto bočnú výšku otáznej pyramídy. Spojíme-li podnožie oboch týchto prímok treťou dovedna, obdržíme pravouhelný trojuhelnik. Hypotenúsa tohoto trojuhelníka má 14 dm, jedna katéta je toľká ako pol strany otázneho štvorca či 6 dm, a druhá katéta je hľadaná výška. Dľa Pythagorovej poučky je $\upsilon = \sqrt{(14^2-6^2)} = \sqrt{160} = 12{\cdot}6\ dm$. Kubičný obsah $= 12 \times 12 \times 12{\cdot}6 : 3 = 604{\cdot}8\ dm^3$.

3. Nejakej pravidelnej šesťstrannej pyramídy jedna strana základnej plochy má 2 dm a každá bočná hrana 3·4 dm; koľký je jej kubičný obsah?

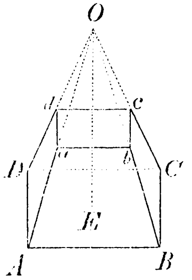
Rozl. Najprv vyhľadáme jej výšku. Spustíme-li v mysli s vrcholu pyramídy na jej základnú plochu kolmú, stojí táto v jej stredu a predstavuje jej výšku. Spojíme-li podnožný bod tejto kolmej s podnožným bodom niektorej z hrán, obdržíme pravouhelný trojuhelník. Hypotenúsa tohoto trojuhelníka (hrana) má 3·4 dm, jedna katéta (podnožné body spojujúca prímka) má práve toľko, ako strana šesťuhelníka či 2 dm (viď § 24), druhá katéta či hľadaná výška má $\sqrt{(3{\cdot}4^2-2^2)} = \sqrt{7{\cdot}66} = 2{\cdot}7\ dm$.

Teraz vypočtujeme základnú plochu. Túto možno, ako už známe, na šesť rovnostranných a shodných trojuhelníkov rozdeliť. Výška jedneho z týchto trojuhelníkov $= \sqrt{(2^2-1^2)} = \sqrt{3} = 1{\cdot}73$. Štvorcový obsah jedneho $\dfrac{2 \times 1{\cdot}73}{2} = 1{\cdot}73\ dm^3$; štvorcorý obsah všetkých šesť, či celej základnej plochy $= 10{\cdot}38\ dm^2$. Kubičný obsah pyramídy $= 10{\cdot}38 \times 2{\cdot}7 : 3 = 9{\cdot}342\ dm^3$.

Koľko *kg* váži toľkáto pyramída z liatiny? a koľko z mramoru? Ponevač 1 dm^3 železa váži 7·21 *kg*, tedy 9·342 $\times$ 7·21 *kg*. Ponevač 1 dm^3 mramoru váži 2·72 *kg*, tedy 9·342 $\times$ 2·72 *kg*

§. 61. Znázornenie pyramídnej čili ihlancovej kypty.

Presekneme-li nejakú pyramídu rovinou rovnobežne so základnou plochou idúcou, obdržíme dva kusy, z ktorých jeden *O(abcd)* predstavuje malú a druhý *O(ABCD)* okyptenú (či bez konca) pyramídu takzvanú *pyramídnu kyptu*. Tamtá či malá pyramída, má priesečnú plochu za základnú, táto či kypta má krem priesečnej ešte i druhú základnú plochu a tak dve základné plochy, vrchnú a spodnú. *Obr. 173*. Ponevač každej pyramíde ako na šírke tak i na dĺžke od spodku na hor vždy rovnako ubýva, preto vrchná menšia základná plocha podobá sa spodnej väčšej základnej ploche. Je-li tedy spodná základná plocha štvorec, musí i vrchná základná plocha byť štvorec atď. Ďalej, ponevač obe základné plochy sú rovnobežné, preto bočné strany u každej okyptenej pyramídy sú trapezy; týchto počet rovná sa vždy počtu strán základnej plochy.



Obr. 173.

Kolmá diaľka oboch základných plôch jednej od druhej na pr. *eE* znamená výšku okyptenej pyramídy; s vrcholu *O* na základnú plochu spustená kolmá *OE* výšku celej pyramídy a jej časť *Oe* výšku malej pyramídy.

§. 62. O vymeriavaní povrchu pyramídnej kypty.

Celý povrch pyramídnej kypty najdeme, jestli najprv štvorcový obsah jej bočných strán či bočných trapezov vyhľadáme a k tomuto potom štvorcový obsah oboch základných plôch pridáme.

Úloha 1. Nejaká pyramídna kypta má za základné plochy štvorce, ichžto strany majú 4 *dm* a 3 *dm* a výška bočných strán, či výška trapezov má 8 *dm*; koľký je jej celý povrch?

Rozl. Spodná základná plocha má 16 dm^2 a vrchná 9 dm^2, obe tedy 25 dm^2; štvorcový obsah jednoho trapezu či lichobežníka $\frac{4+3}{2} \times 8 = 48\ dm^2$, všetkých štyroch 4×48 či 192 dm^2. Celý povrch kypty má $192 + 25$ či 217 dm^2.

2. Nejakej okyptenej pyramídy základné plochy sú rovnostranné trojuhelníky, ichžto obvody majú 1·8 *m* a 1·2 *m* a výška bočných trapezov 0·84 *m*; koľký je jej celý povrch?

---

*) Na obrázci 173 chybí v stredu priesečnej plochy *abcd*, litera *e*.

Rozl. Spodného trojuhelníka jedna strana má 0·6 m, výška $\sqrt{(0·6^2-0·3^2)} = \sqrt{0·27} = 0·52\ m$; jeho štvorcový obsah $= \frac{0·6 \times 0·5}{2} = 0·156\ m^2$. Vrchného trojuhelníka strana má 0·4 m, výška $\sqrt{(0·4^2-0·2^2)} = \sqrt{0·12} = 0·34$; jeho štvorcový obsah $\frac{0·4 \times 0·34}{2} = 0·68\ m^2$. Obe základné plochy $= 0·156 + 0·068 = 0·224\ m^2$. Štvorcový obsah jednej bočnej strany: $\frac{0.6 + 0·4}{2} \times 0·84 = 0·420\ m^2$ všetkých troch $3 \times 0·420$ či $1·260\ m^2$. Celý povrch kypty $0·224 + 1·260 = 1·484\ m^2$ či 1 m^2, 48 dm^2 a 40 cm^2.

§ 63. O vymeriavaní kubičného obsahu okyptenej pyramídy.

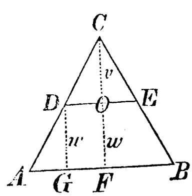
Priblíženo kubičný obsah okyptenej pyramídy najdeme, jestli štvorcové obsahy oboch základných plôch dovedna sčítame a polovicu z tohoto súčtu jej výškou t. j. kolmou diaľkou oboch základných plôch násobíme.

Tak na pr., má-li spodná plocha 4 m^2 a vrchná 3 m^2 a výška kypty 4 m, tedy je jej kubičnv obsah $= \frac{4 + 3}{2} \times 4 = 3·5 \times 4 = 14·0\ m^3$.

Týmto spôsobom vymeriavame kubičný obsah brvien v podobe okyptenej pyramídy okresaných.

Pravý kubičný obsah okyptenej pyramídy najdeme, jestli z kubičného obsahu celej pyramídy, kubičný obsah malej či odseknutej pyramídy odčítame. Chceme-li avšak toto previesť, musíme prv oboch pyramid výšky vyhľadať, čo sa deje dľa nasledujúcich formuliek:

Znázorňuje-li *obr. 174.* kolmý prierez štvorstrannej pyramídnej kypty, tedy AB rovná sa hrane (H) spodnej a DE hrane (h) vrchnej základnej plochy, a značí-li v výšku odseknutej pyramídy a w výšku kypty, tedy $v + w = V$ znamená výšku celej pyramídy, $DO = \frac{h}{2}$, $AG = \frac{H}{2} - \frac{h}{2}$ či $\frac{H-h}{2}$, $AF = \frac{H}{2}$.



Obr. 174.

Poneváč $\triangle\ AFC$ je podobný $\triangle\ AGD$, bo majú rovnaké uhly, tedy $CF : DG = AF : AG$ či $V : w = \frac{H}{2} : \frac{H-h}{2}$ alebo $V : w = h : H-h$. Ztohoto vyplýva, že $V = \frac{w \times h}{H-h}$.

Podobne, $\triangle$ *COD* je podobný $\triangle$ *ADG*, a preto $CO : DG = DO : AG$ alebo $v : w = \frac{h}{2} : \frac{H-h}{2}$ alebo $v : w = h : H - h$. Z toho zas vyplýva, že $v = \frac{w \times h}{H-h}$.

Tak na pr. má-li nejaká pyramídna kypta za základné plochy *štvorce* a je-li $H = 2$ *dm* 4 *cm*, $h = 18$ *cm* a $w = 20$ *cm*, tedy je $V = \frac{20 \times 24}{24-18} = 80$ *cm* a $v = \frac{20 \times 18}{24-18} = 60$ *cm*.

Kubičný obsah celej pyramídy $= \frac{24 \times 24 \times 80}{3} = 15360$ cm^3,

malej pyramídy $= \frac{18 \times 18 \times 60}{3} = 6480$ cm^3.

Pyramídnej kypty $= 8880$ cm^3.

Okyptenej pyramídy kubičný obsah možno ešte i dľa nasledujúcej formulky vypočítať:

Kubičný obsah $= (Z + \sqrt{Z \times z} + z)\,\frac{w}{3}$. Litera Z značí štvorcový obsah spodnej, litera z štorcový obsah vrchnej základnej plochy a litera w výšku kypty, t. j. kolmú diaľku oboch základných plôch jednej od druhej. Je-li Z ako v hor udanom príklade 24×24 či 576 cm^2, $z = 18 \times 18$ či 324 a $\sqrt{Z \times z} = \sqrt{576 \times 324} = 432$; $w = 20$ tedy je kubičný dľa tejto formulky:

$$(576 + 342 + 324)\,\frac{20}{3} = 8880 \; cm^3.$$

Úlohy. 1. Nejaká 2 *m* vysoká pyramídna kypta má za základné plochy rovnostranné trojuhelníky ichžto strany sú: 2·8 *m* a 0·4 *m*; koľký je jej kubičný obsah?

Rozl. Priblíženo jej kubičný obsah najdeme, jestli štvorcové obsahy oboch základných plôch dovedna sčítame a polovicu tohoto súčtu výškou násobíme.

Výška spodného trojuhelníka $= \sqrt{(2{\cdot}8^2 - 1{\cdot}4^2)} = \sqrt{5{\cdot}88} = 2{\cdot}4$; štvorcový obsah $\frac{2{\cdot}8 \times 2{\cdot}4}{2} = 3{\cdot}36$ m^2.

Výška vrchného trojuhelníka $= \sqrt{(0{\cdot}4^2 - 0{\cdot}2^2)} = \sqrt{0{\cdot}12} = 0{\cdot}34$ *m*, jeho štvorcový obsah $= \frac{0{\cdot}34 \times 0{\cdot}4}{2} = 0{\cdot}068$ m^2. Súčet z oboch základných plôch $= 3{\cdot}36 + 0{\cdot}068 = 3{\cdot}428$ m^2. Polovica z tohoto $= 1{\cdot}714$. Kubičný obsah kypty $1{\cdot}714 \times 2 = 3{\cdot}428$ m^3.

Dľa druhého spôsobu, či pravý kubičný obsah vyhľadáme nasledovne:

$$V = \frac{2 \times 2{\cdot}8}{2{\cdot}4} = 2{\cdot}33 \; m, \quad v = \frac{2 \times 0.4}{2{\cdot}4} = 0{\cdot}33 \; m.$$

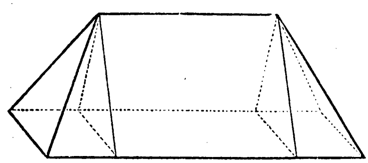
Kubičný obsah celej pyramídy $= \frac{3\cdot36 \times 2\cdot33}{3} = 2\cdot609\ m^3$.

Odseknutej pyramídy $= \frac{0\cdot068 \times 0\cdot33}{3} = 0\cdot007\ m^3$.

Kubičný obsah kypty $= 2\cdot602\ m^3$.

Tento príklad jasno hovorí, že tamtá methoda je veľmi nespoľahlivá, menovite vtedy, jestli je vrchná základná plocha značne menšia než spodná. Rozdiel medzi oboma methodami, je v tomto príklade: $0\cdot826\ m^3$.

Popri cestách nalezajúce sa hŕby štrku predstavujú takzvané *nepravé* prismy *obr. 175.* Presekneme-li takúto prismu, u oboch koncov hrebeňa, dvoma, kolmo na dol a rovnobežne s jej šírkou idúcimi rovinami, rozpadne sa: na jednu pravú trojstrannú prismu, a na dve štvorstranné pyramídy. Tieto posledné nalezajú sa u jej oboch koncov, a tamtá medzi týmito v jej stredu. Vynecháme-li prostrednú prismu (v mysli) a sblížime-li obe rečené pyramídy dovedna, povstane z oboch jedna štvorstranná pyramída. Dľa tohoto *nepravej prismy kubičný obsah najdeme, jestli ju na pravú prismu a na štvorstrannú pyramídu premeníme a týchto kubičné obsahy dovedna sčítame.*



Obr. 175.

Úlohy. 1. Nejaká nepravá prisma je u spodku $2\cdot2\ m$ a u hrebeňa $1\cdot4\ m$ dlhá, potom $1\ m$ široká a $0\cdot7\ m$ vysoká; koľký je jej kubičný obsah?

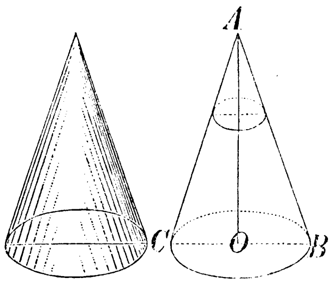
Rozl. Vysekneme-li dvoma rovinami, na hor udaný spôsob, najprv hor spomenutú pravú prismu, bude jej výška toľká ako dĺžka hrebeňa či $1\cdot4\ m$, obe jej základné plochy ale trojuhelníky, ktorých základná strana je toľká ako šírka nepravej prismy či $1\ m$, a výška toľká ako výška nepravej prismy či $0\cdot7\ m$. A preto kubičný obsah otáznej trojstrannej prismy $= \frac{1 \times 0\cdot7}{2} \times 1\cdot4 = 0\cdot490\ m^3$.

Složíme-li obe odseknuté pyramídy dovedna, bude z nich povstalej štvorstrannej pyramídy dĺžka $2\cdot2 - 1\cdot4 = 0\cdot8\ m$, šírka $1\ m$ a výška $0\cdot7\ m$; kubičný obsah $\frac{0\cdot8 \times 1 \times 0.7}{3} = 0\cdot153\ m^3$ obnášať. Dľa tohoto kubičný obsah celej nepravej prismy: $0\cdot490 + 0.153 = 0\cdot643^3$.

Chceme-li len približeno kubičný obsah nepravej prismy vyhľadať: vymeriame v polovici jej dĺžku a šírku a tento násobok z polovičnej šírky a dĺžky násobíme jej výškou, t. j. s hrebeňa na spodnú základnú plochu spustenou kolmou.

§. 64. Znázornenie kužla.

Zaokrúhlime-li bočné strany nejakej pyramídy, obdržíme takzvaný kužel (*obr. 176.*). Kužel je tedy teleso, ktorého základná plocha je *kruhovitá* bočná, ale v jednom spoločnom bode schádzajúca sa *krivá* plocha. Tento spoločný bod A, v ktorom sa bočná krivá plocha schádza, predstavuje vrchol kužla. Spojíme-li vrchol kužla so stredobodom základnej plochy či so stredobodom kruhu O, obdržíme jeho *os* AO. Stojí-li táto na základnej kolmo, je kužel prímy, v odpornom páde kosmý. S vrcholu na základnú spustená kolmá, je *výška* kužla. Vrchol kužla s ktorýmkoľvek bodom obvodu spojujúca po boku kužla idúca prímka, na pr. AB predstavuje jeho bočnú stranu či bočnú výšku. Tieto bočné strany sú u prímeho kužla rovnaké. Sú-li bočné strany kužla toľké, koľký je priemer základnej plochy, tenkráť menujeme ho *rovnostranným*. Krivú bočnú plochu kužla, menujeme kužlovým *plášťom*.



Obr. 176.

Kužel povstane, jestli nejaký kruh, tohoto plocha, rovnobežne so samou sebou a tak sa pohybuje, že jej na veľkosti pomerne vždy rovnako ubýva, až konečne cele zmizne. Pohybuje-li sa otázna plocha do hora kolmo, povstane prímy kužel, pohybuje-li sa do hora v pravo alebo v ľavo, povstane kosmý kužel.

Tak tiež prímy kužel povstane, jestli nejaký pravouhelný trojuhelník kolo svojej jednej katéty, sťa kolo osi sa pohybuje. V tomto prípade opíše druhá jeho katéta základnú kruho-plochu a hypotenúsa bočnú krivú plochu kužla.

Presekneme-li prímy kužel rovinou pozdĺž osi idúcou, obdržíme za priesečnú plochu *rovnoramenný* a u rovnostranného kužla *rovnostranný* trojuhelník. Kolmo na os rovinou urobené prieseky, dajú za priesečnú plochu, kruho-plochu, a šikmo na os urobené prieseky, elliptičnú plochu.

Otázky. *Ktoré* teleso menujeme kužlom? *Koľkoraké* plochy má kužel? *Aká* je jeho bočná? a aká je jeho základná plocha? *Ktorý* bod menujeme vrcholom kužla? *Ako* obdržíme pravú výšku kužla? a bočnú výšku či bočnú stranu? *Ktorý* kužel menujeme prímym? a ktorý kosmým? *Ktorý* kužel menujeme rovnostranným? *Čo za* obrazec predstavuje pozdĺž osi kužla idúca priesečná plocha? *Ktorú* prímku menujeme osou kužla? *U ktorého* kužla je os toľká ako výška? *Ako* povstane kužel?

§. 65. O vymeriavaní povrchu kužla.

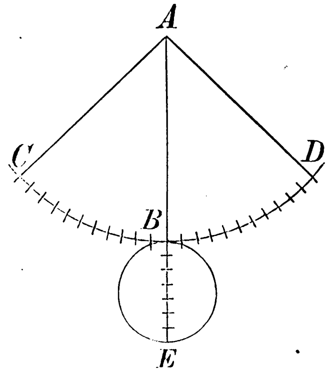
Rozvinieme-li plášť kužla, obdržíme kruhový výsek ADC (*obr. 177.*). Pridáme-li k tomuto výseku ešte i základnú plochu kužla, obdržíme celú jeho sieť. Obluk DC otázneho výseku ADC rovná sa celému obvodu základnej kruhovej plochy kužla a jemu zodpovedajúceho kruhu polmer AC alebo AD zas bočnej výške kužla

Nejakého prímeho kužla celú sieť sostrojíme:

jestli najprv toľkú prímku (AB), koľká je jeho bočná strana nakreslíme; ďalej,

jestli touto prímkou, z jej konečného bodu A, neurčito veľký obluk opíšeme; potom

jestli otáznu prímku AB o toľko na dol predĺžime, koľký je priemer základnej plochy kužla; konečne



Obr. 177.

jestli otázny priemer (BE) na 7 rovných čiastok rozdelíme, a toľkýchto čiastok 11 v pravo a 11 v ľavo od B, na obluku odsekneme a konečné body D a C s bodom A spojíme.

Keďže sieť kužlového plášťa je kruhový výsek, preto každý kruhový výsek možno svinúť v kužlový plášť.

Poneváč kruhový výsek ADC rovná sa trojuhelníku, ktorého základná strana či obluk DC je toľká, ako obvod základnej plochy a výška AD zas toľká ako bočná strana kužla, preto štvorcový obsah kužlového plášťa najdeme, ***jestli obvod základnej kruhovitej plochy bočnou stranou či bočnou výškou násobíme, a z tohoto násobku polovicu vezmeme.***

Celý povrch kužla ale vyhľadáme, jestli k štvorcovému obsahu z plášťa, ešte štvorcový obsah základnej plochy pridáme.

$$\text{Plášť} = \frac{\text{obvod} \times \text{bočná výška}}{2} = \frac{2r\pi \times s}{2} = r \times \pi \times s.$$

V tejto formulke značí litera s bočnú stranu či bočnú výšku kužla, litera r ale polmer jeho základnej plochy.

Celý povrch kužla $= \dfrac{2r\pi \times s}{2} +$ zákl. plocha $= \dfrac{2r\pi \times s}{2}$ $+ r^2\pi = r\pi s + r^2\pi = r\pi\ (s + r)$ či, celý povrch kužla najdeme: ***jestli polmer základnej plochy*** 3·14-mi ***a tento násobok ešte potom súčtom s bočnej strany a polmeru násobíme.***

Tak na pr. má-li polmer základnej plochy u nejakého kužla 4 *dm* a bočná výška 6 *dm*, tedy obnáša celý jeho povrch:

$4 \times 3{\cdot}14 \times (6 + 4) = 125{\cdot}60\ dm^2$.
Sám plášť: $4 \times 3{\cdot}14 \times 6 = 75{\cdot}36\ dm^2$.

Poneváč plášť či $p = r \times \pi \times s$, preto je $r = \frac{p}{\pi . s}$

Z tohoto vyplýva, že *polmer základnej plochy nejakého kužla* najdeme, jestli *štvorcový obsah plášťa* (p) *násobkom* $\pi \times s$ či násobkom s bočnej strany s a čísla π vyplývajúcim, rozdelíme.

V poslednom príklade je $r = \frac{75{\cdot}36}{3{\cdot}14 \times 6} = 4\ dm$.

Presekneme-li nejaký kužel rovinou cez os kužla idúcou, obdržíme za priesečnú plochu rovnoramenný, (u rovnostranného kužla rovnostranný) trojuhelník, ktorý pravá výška či os delí, na dva pravouhelné. (Viď obr. 176). Jedna z katét otáznych pravouhelných trojuhelníkov (OB) znamená polmer $= r$, druhá (AO) pravú výšku $= v$ a hypotenúsa bočnú stranu $= s$ (AB).

Známe-li u nejakého kužla polmer či r, pravú výšku či v, tedy dľa Pythagorovej poučky, bočnú stranu či s najdeme, jestli z kvadrátu polmeru a z kvadrátu pravej výšky z týchto súčtu kvadrátny koreň vyhľadáme. $s = \sqrt{(r^2 + v^2)}$.

Tak na pr. je-li polmer či $r = 2\ dm$ a výška či $v = 4\ dm$, tedy je $s = \sqrt{(2^2 + 4^2)} = \sqrt{20} = 4.47\ dm$.

Podobne, z bočnej a pravej výšky polmer najdeme, jestli z s^2 či z kvadrátu bočnej výšky, v^2 či kvadrát pravej výšky odčítame a z obdržaného zvyšku, kvadrátny koreň vyhľadáme $r = \sqrt{(s^2 - v^2)}$. Tak na pr. je-li pravá výška kužla či $v = 4\ dm$, bočná výška či $s = 4.47\ dm$, tedy je $r = \sqrt{(4.47^2 - 4^2)} = \sqrt{3.98}$ čo učiní takmer $2\ dm$.

Úlohy. 1. Koľko m^2 má plášť nejakého kužla, jehož bočná výška je $9.80\ m$ a obvod základnej plochy $2\ m$?

Rozl. $\frac{2 \times 9.8}{2} = 9.8\ m^2$.

2. Nejakého bľachového lievika širší otvor má v priemere $2\ dm$ a bočná výška $2.4\ dm$; koľko dm^2 bľachy bolo naň zapotreby?

Rozl. $= r \times \pi \times s = 1 \times 3.14 \times 2.4 = 7.536\ dm^2$.

3. Pravá výška nejakého prímeho kužla je $3\ m$ a polmer základnej plochy $8\ dm$; koľko štvorcových dm obsahuje celý jeho povrch?

Rozl. Bočná výška $= \sqrt{(30^2 + 8^2)} = \sqrt{964} = 31.04$

Plášť $= \frac{2 \times 8 \times 3.14 \times 31.04}{2} = 779.724\ dm^2$

Základná plocha $= 8 \times 8 \times 3.14 = 200.96\ dm^2$

Celý povrch $= 980.684\ dm^2$.

4. Jestli plášť nejakého prímeho kužla má 188.40 dm^2 a bočná výška 12 *dm*; koľký je polmer základnej plochy?

Rozl. $r = \frac{\text{plášť}}{\pi s} = \frac{188.40}{3.14 \times 12} = 5\ dm.$

§ 66. O vymeriavaní kubičného obsahu kužla.

Poneváč kužel je vlastne pyramída nekonečne mnoho strán majúca, preto kubičný obsah kužla, podobne ako pyramídy, najdeme, *jestli jeho základnú plochu tretinou pravej výšky násobíme, alebo jestli základnú plochu pravou výškou násobíme a z tohoto násobku tretiu časť vezmeme.*

$K = \text{základná plocha} \times \frac{\text{výška}}{3} = z \times \frac{v}{3} = r \times r\ \pi \times \frac{v}{3} = r^2\pi \times \frac{v}{3}$

Alebo = základná plocha $\times$ výška: $3 = z \times v : 3 = r \times r \times \pi \times v : 3 = r^2.\pi \times v : 3$.

Tak na pr. má-li polmer základnej plochy u nejakého kužla 3 *dm* a výška 6 *dm*, je jeho kubičný obsah $= 3 \times 3 \times 3.14 \times \frac{6}{3} = 56.52\ dm^3$.

Poneváč kubičný obsah kužla rovná sa násobku zo základnej plochy a z tretiny výšky vyplývajúcemu, preto tretinu výšky najdeme, jestli kub. obsah základnou plochou delíme. $\frac{v}{3} = \frac{\text{kub. obsah}}{\text{zákl. plocha}} = \frac{K}{r^2\pi}$

Celá výška $= \frac{3\ K}{r^2\pi}$.

Tak na pr. je-li kubičný obsah nejakého kužla 110.4 dm^3 a polmer jeho základnej plochy 2 *dm*, tedy je $\frac{v}{3} = \frac{110.4}{2 \times 2 \times 3.14} = 8.78\ dm$; $v = 26.34\ dm$.

Toto isté číslo i tak obdržíme, jestli trojnásobok z kubičného obsahu základnou plochou rozdelíme. $v = \frac{3\ k}{r^2\pi} = \frac{3 \times 110.4}{2 \times 2 \times 3.14} = 26.34\ dm$.

Konečne, polmer základnej plochy možno z kubičného obsahu a pravej výšky, dľa nasledujúcej formulky vypočítať:

$$r = \sqrt{\frac{3\ k}{\pi.v}}.$$

Tak na pr. má-li kubičný obsah 56.52 dm^3 a výška 6 *dm*, je

$$r = \sqrt{\frac{3 \times 56.52}{6 \times 3.14}} = \sqrt{9} = 3.$$

Úlohy. 1. Nejaká hŕba obilia kuželovitej podoby má dolu v obvode 2 *m* 5 *dm* a v bočnej výške 1 *m*; koľko hektolitrov obilia obsahuje táže?

Rozl. Priemer základnej plochy $= 25 : 3.14 = 7.96$, polmer $= 3.98$ *dm*.

Pravá výška $= \sqrt{(10^2 - 3.98^2)}$ (viď predošlý §) $= \sqrt{84.16} = 9.17$ *dm*.

Kubičný obsah $= 3.98 \times 3.98 \times 3.14 \times 9.17 : 3 = 151.99$ dm^3, čo učiní 151 *l* 99 *cl* či 1 *hl* 51 *l* 99 *cl*.

2. Nejaká kopa sena má dolu v priemere 2.6 *m* a v pravej výške 4.5 *m*; koľko *kg* sena nachodí sa v nej, jestli 1 m^3 sena váži 10 *kg*?

Rozl. Kubičný obsah: $1.3 \times 1.3 \times 3.14 \times \frac{4.5}{3} = 7.953$ m^3, čo učiní 79.5 *kg*.

3. Priemer nejakej lievikovatej nádoby u širšieho otvoru má 1.5 *dm* a jej kubičný obsah 3 *l* či 3 dm^3; koľká je jej výška?

Rozl. $v = \frac{3\,k}{r^2\pi} = \frac{9}{7.06} = 1.27$ *dm*.

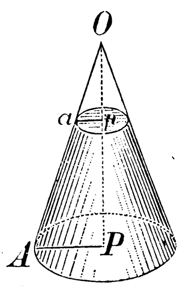
4. Koľko korún príde za strom, ktorého priemer dolu má 0.80 *m* a výška 10.8 *m*, jestli 1 m^3 po 6.20 korún predáva sa?

Rozl. Kubičný obsah $= 0.40 \times 0.40 \times 3.14 \times \frac{10.8}{3} = 1.801$ m^3.

Cena stromu $= 1.801 \times 6.20 = 21.16$ kor.

§ 67. Znázornenie okypteného kužla, čili kužlovej kypty.

Rozsekneme-li nejaký prímy kužel rovinou, rovnobežne so základnou plochou idúcou, rozpadne sa tenže na dve časti, z ktorých jedna predstavuje malý kužel a druhá okyptený kužel či-li kuželovú kyptu. *Obr. 178.* Táto posledná má dve základné plochy, ktoré sú kruhoplochy; jedna z nich je menšia a druhá väčšia. Spustíme-li u kuželovej kypty s vrchnej základnej plochy na spodnú, kolmú, obdržíme jej *pravú* výšku *pP*; spojíme-li dva protistojné body vrchného a spodného obvodu oboch základných plôch prímkou po boku kypty idúcou, obdržíme jej *bočnú* výšku *(aA)*.



Obr. 178.

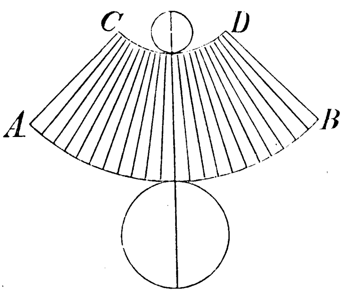
Okyptený kužel či-li kuželová kypta, rovná sa rozdielu, z celého a malého kužla.

Kuželovú kyptu znázorňujú: kvetné nádoby, sudy, železné hrnce, kade s okrúhlym kruhovitým dnom, vrchovca pozbavená a okliesnená svrčina alebo borovica atď.

Otázky. *Ako* povstane kuželová kypta? Čo za obrazce predstavujú jej základné plochy? *Koľkoraké* výšky rozoznávame u kuželovej kypty? *Ako* obdržíme jej pravú? a *ako* jej bočnú výšku?

§ 68. O vymeriavaní povrchu kuželovej kypty.

Rozviniem-li plášť nejakej kuželovej kypty, obdržíme tej podoby sieť, akú na pr. *ABDC na obr. 179* znázorňuje. Jej základné strany CD a AB sú obluky a síce toľké, koľké sú obvody oboch jej základných plôch. Ako čo do podoby tak i čo do veľkosti rovná sa $ABDC$, lichobežníku jehož základné strany sú obluky CD a AB a výška zas toľká koľká je prímka AC alebo BD či bočná výška kypty. O pravdivosti tohoto veľmi snadno sa presvedčíme, jestli na kuželovej kypte, ktorá otáznej sieti zodpovedá, zôkol vôkol po celom jej boku nekonečne mnoho strán načiarame. Následkom tohoto rozpadne sa celý jej plášť na nekonečne mnoho trapezov, tak ako to (obr. 179.) znázorňuje. Sčítame-li štvorcové obsahy všetkých týchto trapézov dovedna, obdržíme štvorcový obsah celého plášťa. Tento istý štvorcový obsah ale i tak obdržíme, jestli obe základné strany či AB a CD dovedna sčítame a tento súčet polovicou bočnej výšky či polovicou AC alebo polovicou BD násobíme. Z tohoto vyplýva, že *štvorcový obsah kuželovej kypty najdeme, jestli obvody oboch základných plôch dovedna sčítame a tento súčet polovicou bočnej výšky násobíme, alebo, jestli polovicu zo súčtu oboch základných obvodov, celou bočnou výškou násobíme.*



Obr. 179.

Značí-li R polmer spodnej a r polmer vrchnej základnej plochy a s bočnú výšku kypty, tedy je

$$\text{Plášť} = (2\,R\pi + 2\,r\pi)\,\frac{s}{2} \text{ alebo } s\pi\,(R + r)$$

Táto posledná formulka hovorí, že plášť kuželovej kypty i tak najdeme, jestli súčet z polmerov oboch základných plôch, najprv celou jej bočnou stranou a potom ešte číslom π násobíme.

Tak na pr. je-li $R = 6\ dm$ a $r = 4\ dm$ a $s = 8\ dm$ tedy je štvorcový obsah plášťa $= (2 \times 6 \times 3.14 + 2 \times 4 \times 3.14) \times 4 = 251.20\ dm^2$

Alebo $= (6 + 4) . 8 \times 3.14 = 251.20$ dm^2.

Chceme-li štvorcový obsah celého povrchu kuželovej kypty obdržať, musíme k štvorcovému obsahu z plášťa ešte i štvorcový obsah oboch základných plôch či $R^2\pi$ a $r^2\pi$ pridať.

Tak na pr. poslednej kuželovej kypty celý povrch je:

$$251.20 + 113.04 + 50.24 = 414.48 \; dm^2$$

bo $R^2\pi = 113.04$ dm^2 a $r^2\pi = 50.24$ dm^2.

Úlohy. 1. Nejakej kužeľovej kypty bočná výška je 6 *dm*, a priemery oboch základných plôch 8 *dm* a 5 *dm*; koľký je jej povrch?

Rozl. Plášť $= (2 \times 8 \times 3.14 + 2 \times 5 \times 3.14) \times 3 = 484.8$ dm^2

Základné plochy $= 8 \times 8 \times 3.14 + 5 \times 5 \times 3.14 = 279.46$ dm^2

Celý povrch $= 764.26$ dm^2

2. Koľko m^2 má celý povrch kuželovej kypty, u ktorej bočná výška je 10 *m* a základné plochy 3 m^2 a 2.5 m^2?

Rozl. Najprv vyhľadáme polmer spodnej a polmer vrchnej plochy. Poneváč $R^2\pi = 3$ tedy je $R = \sqrt{\frac{3}{\pi}} = \sqrt{0.95} = 0.97$

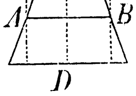
a poneváč $r^2\pi = 2.5$, tedy je $r = \sqrt{\frac{2.5}{\pi}} = \sqrt{0.796} = 0.89$

Plášť $= (0.97 + 0.89)\ 10 \times 3.14 = 8.184$ dm^2.

Celý povrch $= 8.184 + 3 + 2.5 = 13.684$ dm^2.

§ 69. O vymeriavaní kubičného obsahu kuželovej kypty.

Približeno, rovná sa kuželová kypta valcu, ktorý má s ňou rovnú výšku a ktorého základná plocha je toľká, koľká je priesečná plocha v polovici kypty. A preto, kubičný obsah kuželovej kypty, približeno najdeme, *jestli túto priesečnú plochu v polovici kypty, tejto pravou výškou násobíme. Obr. 180.* znázorňuje kolmý prierez otázneho valca a kypty. *AB* je priemer v polovici kypty ležiacej priesečnej plochy a *CD* je jej pravá výška.



Obr. 180.

Je-li na pr. priemer, v polovici kypty nalezajúcej sa priesečnej plochy 14 *cm* a výška kypty 50 *cm*, tedy je jej kubičný obsah $= 7 \times 7 \times 3.14 \times 50 = 7693$ cm^3.

Otáznej priesečnej plochy polmer i tak najdeme, jestli zo súčtu polmerov oboch základných plôch polovicu vezmeme. Dľa tohoto je potom

$$\text{Kub. obsah kypty} = \left(\frac{R + r}{2}\right) \times \left(\frac{R + r}{2}\right) \times \pi \times v$$

Litera $v \doteq$ (výška).

Tak na pr. má-li polmer spodnej plochy 8 *cm* a polmer vrchnej plochy 6 *cm*, a výška 50 *cm*, tedy je

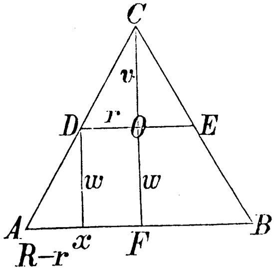
kub. obsah kypty: $\left(\frac{8+6}{2}\right) \times \left(\frac{8+6}{2}\right) \times 3.14 \times 50$
$7 \times 7 \times 3.14 \times 50 = 7693$ cm^3.

Chceme-li pravý kubičný obsah nejakej kuželovej kypty vyhľadať: musíme ju do celého kužla doplniť a potom, z kubičného obsahu celého či veľkého kužla, kubičný obsah malého kužla odčítať. Týmto spôsobom obdržaný rozdiel, je kubičný obsah hľadanej kuželovej kypty. Pravdaže je toto len tak možné, jestli z výšky kuželovej kypty prv výšku celého kužla a výšku malého kužla vypočítame.

Spôsob vypočítania výšky malého kužla, z výšky kuželovej kypty znázorňuje *obr. 181*. *ABC* predstavuje kolmý prierez celého kužla; *DE* je priemer a *DO* polmer vrchnej základnej plochy; *AB* zas je priemer a *AF* je polmer spodnej základnej plochy a *FO* či w je výška kuželovej kypty. △ *DOC* a *AxD* sú si podobné, a preto:

$v : w = r : (R-r)$; z čoho

$$v = \frac{w.r}{R-r}$$



Obr. 181.

t. j. výšku malého kužla najdeme, jestli výšku kuželovej kypty (w) *polmerom vrchnej plochy* (r) *násobíme, a tento násobok, rozdielom z oboch polmerov vyplývajúcim rozdelíme.*

Pridáme-li takto vyhľadanú výšku malého kužla k výške kuželovej kypty, obdržíme výšku celého či veľkého kužla, bo $w + v = V$ či *CF*. *V* značí výšku veľkého kužla.

Je-li na pr. *R* či polmer spodnej základnej plochy u nejakej kypty 40 *cm*, a *r* či polmer vrchnej základnej plochy 30 *cm* a výška celej kypty 2 *m*, tedy je výška malého kužla či $v = \frac{200.30}{10} =$ 600 *cm* či 6 *m*.

Výška veľkého kužla či $V = 600 + 200 = 800$ *cm* či 8 *m*.

Kub. obsah veľkého kužla $= 40 \times 40 \times 3.14 \times \frac{800}{3} = 1339.73$ dm^3

Kub. obsah malého kužla $= 30 \times 30 \times 3.14 \times \frac{600}{3} = 565.20$ dm^3

Kub. obsah kypty $= \quad = 774.53$ dm^3.

Pravý kubičný obsah nejakej kuželovej kypty, možno i dľa nasledujúcej formulky vypočítať:

$$(R \times R + R \times r + r \times r) \times \pi \times \frac{v}{3},$$ v ktorej obsažené litery značia tie isté veličiny čo pred tým.

Poslednej kypty kubičný obsah dľa tejto formulky je:

$$(40 \times 40 + 40 \times 30 + 30 \times 30) \times 3.14 \times \frac{200}{3} = 774.53 \ dm^3.$$

Úlohy. 1. Nejakého dreveného kláta polmer spodnej či väčšej základnej plochy má 26 *cm*, a polmer vrchnej základnej plochy 20 *cm* a dĺžka 5 *m*; koľký je jeho kubičný obsah? a koľko váži tenže klát, jestli 1 $dm^3 = 0.9 \ kg$?

Rozl. Polmer priesečnej plochy v polovici kláta je $\frac{26 + 20}{2} = 23 \ cm.$

Kubičný obsah kláta, približeno rátajúc $= 23 \times 23 \times 3.14 \times 500 = 580500 \ cm^3 = 58 \ dm^3$ a $500 \ cm^3$ či $580.5 \ dm^3$. Váha $= 580 5 \times 0.9 \ kg = 522.45 \ kg.$

2. Koľko hektolitrov vody vleje sa do käde, jejžto priemer u základnej plochy má 1 *m*, a u vrchnej 1.6 *m* a hĺbka 1.4 *m*?

Rozl. Malého doplňovacieho kužla výška či $v = \frac{1.4 \times 0.5}{0.3} = 2.33 \ m.$ Veľkého kužla výška či $V = 2.33 + 1.40 \ m = 3.73 \ m.$

Kub. obsah veľkého či celého kužla $= 0.8 \times 0.8 \times 3.14 \times \frac{3.73}{3} = 2.498 \ m^3$

Kub. obsah malého kužla $= 0.5 \times 0.5 \times 3.14 \times \frac{2.33}{3} = 0.609 \ m^3$

Kubičný obsah käde $= 1.809 \ m^3$ či $1899 \ dm^3$

A preto vleje sa do nej 1899 litrov či 18 *hl* a 99 litrov.

3. Niekto chce mať na 10 litrov veľkú a kuželovej kypte podobnú nádobu, jejžto spodný priemer má 14 *cm* a vrchný 18 *cm*; koľká musí byť jej výška? (Približeno rátajúc).

Rozl. Poneváč v polovici kypty nalezajúca sa priečna plocha, násobená výškou dá za súčin jej kubičný obsah, preto výšku otáznej nádoby najdeme, jestli jej kubičný obsah, otáznou priesečnou plochou rozdelíme.

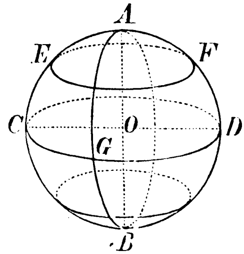
Kubičný obsah nádoby je: 10 dm^3 či 10000 cm^3.

Priesečná plocha $= \left(\frac{7 + 9}{2}\right) \cdot \times \left(\frac{7 + 9}{2}\right) \times 3.14$ či $200 \cdot 96 \ cm^2$

Výška $= 10000 : 200.96 = 49 \ cm.$

§ 70. Znázornenie gule.

Guľa je okruhlé, len jednou krivou plochou uzavreté teleso, ktorejžto všetky body, od jednoho vnútri gule nalezajúceho sa bodu, *O* (*obr. 182.*) rovnoďaleko nachodia sa. Tento posledný bod menujeme jej *stredobodom*. Guľa má stredobod. Spojíme-li ktorýkoľvek bod jej povrchu s otáznym stredobodom, obdržíme tak zvaný polmer gule *CO* Predĺžime-li nejakej gule polmer i za stredobod až k oprotnej strane, obdržíme priemer gule. *CD* alebo *AB* Priemer gule je tedy, dva oprotné body gulového povrchu spájajúca a cez stredobod gule idúca prímka. Poneváč všetky body guľového povrchu od jej stredobodu rovnak ďaleko nachodia sa, preto sú všetky polmery, a i všetky priemery u gule rovnaké.



Obr. 182.

Presekneme-li guľu, nejakou, cez jej stredobod idúcou rovinou, rozpadne sa na dve rovné časti, ktoré menujeme *pologuľami*. Hranica takto povstalej priesečnej plochy je kruh. Poneváč otázny kruh je zo všetkých, na povrchu gule možných kruhov najväčší, preto menujeme ho *najväčším kruhom* gule; jeho stredobod je súčasne i stredobodom gule a jeho polmer je i polmerom gule.

Úlohy. 1. Vyrež z papieru polokruh a skrúť ho okolo svojho priemeru sťa okolo osi!

Čo za teleso znázorňuje ním opísaná cesta? *Koľký* je priemer a polmer takto povstalej gule? *Koľkokrát* je jej priemer väčší než polmer? *Koľko* polmerov a koľko priemerov má jedna a tá istá guľa?

2. Nakresli na nejakej guli najväčší kruh?

Na koľko čiastok delí najväčší kruh guľu? *Koľko* najväčších kruhov je možno na jednej a tej istej gule načiarať? *Ako* menujeme ten najväčší kruh našej zemegule, ktorý ju delí na južnú a severnú pologuľu? A ten, ktorý ju delí na východnú a západnú pologuľu?

Priemer, ktorý stojí na priesečnej ploche najväčšieho kruhu kolmo, predstavuje os gule. Konečné body tohoto priemeru menujeme *točnami* či *pólami*. (*A* a *B*)

Úlohy. 1. Urob nejakú guľu z hliny alebo vosku a prepichni ju ihlicou, cez jej stredobod idúcou!

Čo predstavuje v tomto prípade otázna ihlica? *Koľko* pólov či točien má naša zem? *Ktorý* z nich menujeme severným? a ktorý južným?

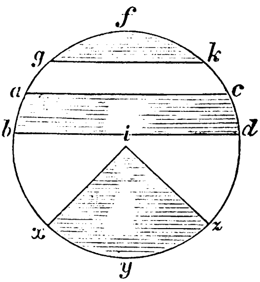
Cez póly či-li točny nejakej gule idúce kruhy sú najväčšie kruhy.

Kruhy ktoré s nejakým najväčším kruhom idú rovnobežne, menujeme *rovnobežnými či-li parallelnými* kruhami. Tieto posledné sú čím diaľ od najväčšieho kruhu ležia, tým menšie.

Otázky. *Ku ktorému* najväčšiemu kruhu, ťaháme na zemeguli rovnobežné? *Čo* určujeme pomocou rovnobežných kruhov na na zemi? (Zemepisnú šírku). Ako menujeme cez točny našej zeme idúce najväčšie kruhy? (Meridianmi). Pod koľkým uhlom režú sa meridiany a rovnobežné kruhy? Čo určujeme pomocou meridianov? (Zemepisnú diaľku).

Načiarame-li na povrchu nejakej gule, tri, v jednom bode nerežúce sa najväčšie kruhy, rozpadne sa tenže na takzvané *guľové* či sphaerické *trojuhelníky*. Strany týchto trojuhelníkov sú obluky.

Presekneme-li guľu rovinou na dve nerovné časti, obdržíme takzvané *guľové odseky* (segmenty). Aj pologule sú guľové odseky avšak medzi sebou rovnaké. Hranice guľového odseku, sú jedna krivá a druhá rovná kruhovitá plocha, tamtá je časť z guľového povrchu. Poslednú či krivú hraničnú plochu guľového odseku, menujeme *guľovou čiapkou* (kalotte) *(Obr. 183. gfk)*.



Obr. 183.

Guľový odsek, je tedy, nejakou rovinou z gule odseknutá časť a guľová čiapka je tejto časti krivý povrch, jej krivá hranica.

Presekneme-li nejakú guľu dvoma rovnobežnými rovinami, rozpadne sa táto, na dva guľové odseky a na takzvané *guľové kolečko.* Toto posledné je tá časť gule, ktorú otázne dve roviny medzi sebou uzavierajú. Krivú hraničnú plochu kolečka menujeme *guľovým pásmom* (zonou). Obr. 183. *abdc.*

Skrúti-li sa nejakého najväčšieho kruhu kruhový výsek, (Obr. 183. *ixyz*) vôkol jednoho zo svojich ramien, povstane takzvaný *guľový výsek* (*ixyz*).

Dve, (alebo viac) cez póly gule idúce roviny, delia povrch gule na *guľové dvojuhelníky*, a samú guľu na guľové *krížalky* (Obr. 182. *ACBGA*).

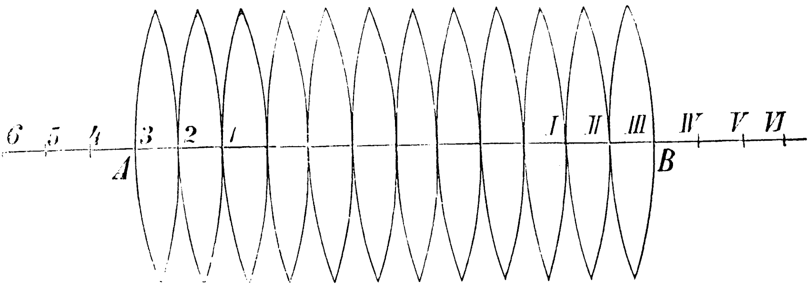
Otázky *Ako* povstane guľový odsek? a guľový výsek? *Čo* rozumieme pod guľovou čiapkou? a pod guľovým pásmom. *Koľko* hraničných plôch má guľový odsek? a guľový výsek? a aké sú tieto plochy? *Koľko* pasiem rozoznávame na zemeguli?

§ 71. O vymeriavaní guľového povrchu.

Predovšetkým sostrojíme sieť nejakej gule. Poneváč povrch gule, je krivá, do sebe uzavretá plocha, preto sostrojenie jej sieti v rovine, je len priblíženo možné.

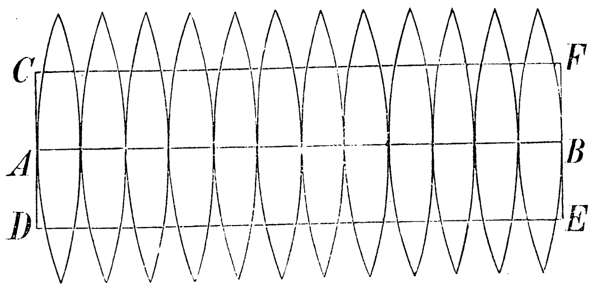
Najprv načiarame toľkú prímku, koľký je obvod jej najväčšieho kruhu, na pr. prímka *AB (Obr. 185.)*. (Tento obvod najväčšieho kruhu, veľmi snadno najdeme, jestli polmer otáznej gule na 7 rovných čiastok rozdelíme a toľkýchto čiastok 22 vezmeme).

Otázny obvod najväčšieho kruhu či prímku AB rozdelíme na 12 rovných čiastok, a toľkýchto čiastok ešte 9 označíme ako pred



Obr. 184.

bodom A tak i za bodom B, na pravo i v ľavo predĺženej prímke AB. Potom otvorom kružidla 10 týmto čiastkam zodpovedajúcim, opíšeme najprv z deliacich bodov 1, 2, 3 atď. a potom z deliacich bodov I., II., III. atď. obluky. Posledné a predošlé obluky režú sa vzájomne, následkom čoho povstane 12 čočkovitých figúr, ako to *obr. 184.*



Obr. 185.

znázorňuje. Vystrihneme-li tieto figúry z papieru a složíme-li ich, dovedna tak, že sa svojími krajmi stýkajú, obdržíme gule podobné teleso.

Na základe znázornenej sieti, možno i štvorcový obsah guľového povrchu, snadno vyhľadať.

Tým cieľom postavme u oboch konečných bodov prímky AB, kolmé a urobme $AC = AD = r$ a $FB = BE = r$. Spojíme-li body C a F, a podobne i body D a E prímkami CF a DE dovedna, obdržíme obďalník $CDEF$. Štvorcový obsah tohoto obďalníka je toľký, koľký je štvorcový obsah všetkých 12 čočkovitých figúr dovedna, či koľký je povrch celej gule. O pravdivosti tohoto tak sa presvedčíme, keď považime, že všetky z čočkovitých figúr, prímkami CF a DE odrezané čipkovité čiastky, ktoré von z otázneho obdĺalníka ležia, zaujímajú takmer toľký priestor, ako dnu v obdĺalníku medzi figúrami nachodiace sa, ešte nevyplnené klinovité medzery.

Poneváč u obdĺalníke $CDEF$, základná strana DE je toľká, koľký je obvod najväčšieho kruhu či $2\ r\pi$ a výška CD alebo FE zas toľká koľký priemer otázneho kruhu či priemer otáznej gule t. j. $2\ r$, preto je štvorcový obsah celého obdĺalníka, a podobne i štvorcový obsah celého guľového povrchu:

$$2\ r\pi \times 2\ r.$$

Z tohoto vyplýva, že *štvorcový obsah guľového povrchu najdeme, jestli najväčšieho kruhu obvod, priemerom násobíme.*

Tak na pr. je-li priemer nejakej gule 4 *dm*, tedy je jej povrch $4 \times 3.14 \times 4 = 50.24\ dm^2$.

Poneváč $2\ r\pi \times 2\ r = 4\ r^2\pi$ a poneváč $r^2\pi$ značí štvorcový obsah najväčšieho kruhu, preto toto pravidlo možno i takto vysloviť: *štvorcový obsah nejakej gule, jej povrchu najdeme, jestli štvorcový obsah jej najväčšieho kruhu 4-krát vezmeme.*

Tak na pr. je-li polmer nejakej gule 2 *dm*, tedy je štvorcový obsah jej najväčšieho kruhu $2 \times 2 \times 3.14$ či $12.56\ dm^2$, a štvorcový obsah jej povrchu $4 \times 12.56\ dm^2$ či $50.24\ dm^2$.

Vôbec, štvorcový obsah guľového povrchu $= 2\ r\pi \times 2\ r$ alebo $4r^2\pi$.

Dľa tohoto povrch nejakej gule rovná sa štvornásobku zo štvorcového obsahu jej najväčšieho kruhu, či *povrch gule* (*p. g.*) je štyrikrát toľký, koľký je štvorcový obsah jej najväčšieho kruhu.

Poneváč ale $4\ r^2\pi$ je toľko ako $4\ \pi r^2$, preto $r^2 = \frac{p.\ g}{4\ \pi}$

z čoho $r = \sqrt{\frac{p.\ g.}{4\ \pi}}$ t. j. *polmer nejakej gule najdeme, jestli štvorcový obsah jej povrchu násobkom* $4\ \pi$ *rozdelíme a z tohoto podielu kvadrátny koreň vyhľadáme.*

Tak na pr. je-li povrch nejakej gule $50.24\ dm^2$, tedy je jej

$$\text{polmer} = \sqrt{\frac{50.24}{4 \times 3.14}} = \sqrt{4} = 2\ dm.$$

Znamenajú-li litery R a r polmery dvoch rozdielnych gúl, tedy sú ich povrchy: $P.\ g. = 4\ R^2\pi$ a $p.\ g. = 4\ r^2\pi$.

Srovnáme-li oba tieto povrchy jeden s druhým, najdeme, že

$P.\ g.\ : pg = 4\ R^2\pi : 4\ r^2\pi$ alebo skráteno

$P.\ g.\ : pg = R^2 : r^2$ či, *že povrchy dvoch rozdielnych gúľ, stoja v tom pomere jeden k druhému ako kvadráty, t. j. kvadrátne čísla, z ich polmerov.*

Tak na pr. je-li polmer nejakej gule či $R = 2$ *dm* a druhej $r = 1$ *dm*, tedy stoja ich povrchy v tom pomere jeden k druhému, ako $2^2 : 1^2$ či ako $4 : 1$. Z tohoto vyplýva, že zo dvoch gúl', tá ktorá má dvakrát väčší polmer, má *štyrikrát* väčší povrch, bo 2^2 sú 4.

Podobne, je-li $R = 3$ a $r = 1$, tedy stoja ich povrchy v tom pomere jeden k druhému ako $3^2 : 1^2$ či $9 : 1$ Z tohoto zas vyplýva, že zo dvoch gúl', tej, ktorá má trikrát väčší polmer, zodpovedá deväťkrát väčší povrch, bo 3^2 je 9 atď.

Poznámka. Povrch guľovej čiapky, možno dľa nasledujúcej formulky vyhľadať:

$$\text{Čiapka} = 2\, r\pi \times v.$$

V tejto formulke litera r značí polmer otáznej gule a litera v výšku guľového odseku, t. j. zo stredu guľovej čiapky na jej spodnú kruhovitú hraničnú plochu spustenú kolmú. Tak na pr. je-li $r = 10$ *dm* a $v = 2$ *dm*, tedy je povrch čiapky $= 20 \times 3.14 \times 2 = 125.60$ dm^2.

Dľa tejto istej formulky vyhľadáme i povrch guľového pásma s tým istým rozdielom, že v tomto prípade značí litera v výšku pásma t. j. s vrchnej kruhovitej hraničnej plochy guľového kolečka na spodnú jeho hraničnú kruhovitú plochu spustenú kolmú, tejto dĺžku, a litera r ako predtým, polmer gule.

Úlohy. 1. Nejaká guľa má v priemeri 44 *cm*; koľký je jej povrch?
Rozl. $4 \times 22 \times 22 \times 3.14 = 60{,}790$ dm^2.

2. Od pozlácania nejakej vežovej gule platilo sa 25 zl.; koľko stál 1 m^2 tohoto pozlácania, jestli otázna guľa je 1 *m* hrubá?
Rozl. Najprv vyhľadáme jej povrch. Tento má $4 \times 0.5 \times 0.5 \times 3.14$ či 3.14 m^2-ov. Poneváč 3.14 m^2-tre stály 25 zl., tak 1 m^2 stál $25 : 3.14 = 7$ zl. 96 kr.

3. Nejakej gule priemer je 1.6 *m* a druhej 1.2 *m*; koľko m^2-ov bľachy treba na pokrytie oboch?
Rozl. $4 \times 0.8 \times 0.8 \times 3.14 + 4 \times 0.6 \times 0.6 \times 3.14$ či $8.0384 + 4.5216 = 12.56$ m^2.

4. Má-li povrch nejakej gule 40 dm^2; koľký je jej polmer?

$$\text{Rozl. } r = \sqrt{\frac{40}{4 \times 3.14}} = \sqrt{3.19} = 1.78\ dm.$$

5. Keďže objem našej zemegule u rovníka je 5400 zemepisných míľ; koľký je jej povrch, jestli si ju ako dokonalú guľu predstavíme?
Rozl. Polmer či $r = 5400 : 6.28 = 859.87$ míľ.
Povrch $= 4 \times 859.87 \times 859.87 \times 3.14 = 9.286{,}580 \cdot 356264$ zemep. štvor. míľ.

6. Jedna zo dvoch gúľ má 16 *cm* a druhá 10 *cm* veľký priemer; v akom pomere stoja ich povrchy jeden k druhému?
Rozl. V tom pomere ako $8^2 : 5^2$ či ako $64 : 25$ t. j. tamtej prvej povrch je $64 : 25 = 2.56$-krát väčší než poslednej.

§ 72. O vymeriavaní kubičného obsahu gule.

Nalejeme-li do dutého rovnostranného cylindra toľko vody, koľko vleje sa do, ten istý priemer ako otázny cylinder majúcej, guli: naplní sa tamten do dvoch tretín svojho priestoru. Z tohoto vyplýva, *že kubičný obsah nejakej gule rovná sa dvom tretinám, kubičného obsahu takého rovnostranného cylindra, ktorý má toľký priemer koľký otázna guľa.* Poneváč ale kubičný obsah rovnostranného cylindra (Viď § 57) je $r^2\pi \times 2\,r$ či $2\,r^3\pi$, preto kubičný obsah ten istý priemer majúcej gule je $^2/_3 \times 2\,r^3\pi$ či $\frac{4\,r^3\pi}{3}$ či $4\,r^3\pi : 3$. Z tohoto vyplýva, že *kubičný obsah nejakej gule najdeme, jestli jej polmer sebou samým trikrát násobíme* (bo $r^3 = r \times r \times r$) *a obdržaný násobok potom ešte 4-krát, a tento posledný ešte 3.14-krát vezmeme a z konečného násobku tretinu vyhľadáme.* Tak na pr. je-li polmer nejakej gule 2 *dm*, tedy je jej kubičný obsah $= 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3.14 : 3$ či $100.48 : 3 = 33.49$ *dm*³.

Považime-li, že $4\,r^3\pi : 3$ je toľko koľko $4\,r^2\pi \times r : 3$ a že $4\,r^2\pi$, ako už známe, značí povrch gule, ktorej polmer je r, preto kubičný obsah nejakej gule najdeme; jestli jej povrch či $4\,r^2\pi$ polmerom či s r násobíme, a z tohoto násobku tretinu vezmeme, alebo, *jestli povrch gule, tretinou z polmeru násobíme.* Chceme-li tedy kubičný obsah nejakej gule vyhľadať, musíme prv jej povrch vypočítať a tento potom tretinou z polmeru násobiť, alebo polmerom násobiť a z tohoto násobku, tretiu časť vyhľadať.

Túto istú formulku na vyhľadanie kubičného obsahu nejakej gule ešte i tak najdeme, jestli otáznu guľu rovinami cez jej stredobod idúcimi na samé troj- a štvorstranné pyramídy rozložíme a všetkých týchto pyramíd kubičné obsahy dovedna sčítame. V tomto rozkladaní na pyramídy, možno tak ďaleko pokračovať, že konečne obdržíme pyramídy ichžto základné plochy sú takmer roviny. Cieľom ľahšieho pochopenia, rozložme týmto spôsobom nejakú guľu (v mysli) na nekonečne mnoho takých trojstranných pyramíd, ktorých základné plochy sú rovnaké a takmer rovinám podobné. Poneváč kubičný obsah pyramídy je ako už známe = základná plocha $\times$ výška : 3 a poneváč výška všetkých týchto pyramíd rovná sa polmeru, preto kubičný obsah jednej z týchto pyramíd je $z \times \frac{r}{3}$; dvoch dvakráť toľko či $2\,z \times \frac{r}{3}$; troch, trikrát toľko či $3\,z \times \frac{r}{3}$ atď.

Poneváč súčet základných plôch zo všetkých týchto pyramíd rovná sa povrchu gule či $4\,r^2\pi$, preto kubičný obsah všetkých týchto pyramíd, musí byť: $4r^2\pi \times \frac{r}{3}$ či $\frac{4\,r^3\pi}{3}$, t. j. tá istá formulka, čo predtým.

Guľový povrch označujúcu formulku: $4\ r^2\pi$ možno na nasledujúce činitele rozložiť: $2\ r \times 2 \times r \times \pi$ či $(2r)^2 \times \pi$. Táto posledná formulka označuje takú kruhovú plochu jejžto polmer je $2r$. Formulka $(2r)^2\ \pi \times \frac{r}{3}$ ale znamená kubičný obsah takého prímeho kužla, u nehož polmer základnej plochy je $2r$ a výška r. Táto posledná formulka rovná sa cele predešlej kubičný obsah gule udávajúcej, bo $4\ r^2\pi \times \frac{r}{3} = (2r)^2\ \pi \times \frac{r}{3}$.

Poneváč ále $4\ r^2\pi \times \frac{r}{3} = (2r)^2\pi \times \frac{r}{3}$ preto kubičný obsah nejakej gule rovná sa kubičnému obsahu takého prímeho kužla jehož základná kruhovitá plocha má toľký polmer ako je priemer a jehož výška je toľká, ako je polmer otáznej gule. A preto kubičný obsah nejakej gule i tak vyhľadáme, jestli miesto nej, kubičný obsah takého prímeho kužla vypočítame, ktorého základná plocha má toľký polmer, koľký je priemer a ktorého výška je toľká koľký je polmer.

Tak na pr. má-li priemer nejakej gule 2 *dm*, tedy je jej kubičný obsah: $2 \times 2\ 3.14 \times \frac{1}{3}$ či $12.56 : 3 = 4.186\ dm^3$.

O t á z k y. Nejakú dutú guľu jejžto polmer je r (na pr. 2 *dm*) potom nejaký rovnostranný dutý valec jehož polmer u základnej plochy je $2\ r$ (4 *dm*) a výška r (2 *dm*) naplň vodou a síce guľu a kužel docela a dutý valec či cylinder do dvoch tretín. V ktorom z týchto troch telies viac vody nachodí sa? A či vo všetkých troch rovnaké množstvo? Koľko kubičných decimetrov či litrov vody nachodí sa v každom? Vypočítaj a presvedč sa, že vo všetkých troch je rovnaké množstvo.

Známe-li kubičný obsah nejakej gule, tedy z kubičného obsahu jej polmer možno dľa jej nasledujúcej formulky vyhľadať:

$r = \sqrt[3]{\frac{3\,k}{4\,\pi}}$ v ktorej $k =$ značí kubičný obsah gule t. j. trojnásobný kubičný obsah, delíme štvornásobkom z čísla 3.14 a tento podiel rozložíme (probovaním alebo dľa tabulky) na tri rovnaké činitele.

Tak na pr. je-li kubičný obsah gule $= 12.56\ dm^3$, tedy je $r = \sqrt[3]{\frac{37.68}{12.56}} = \sqrt[3]{3} = 1.4\ dm$.

Kubičný obsah guľového odseku $= \frac{1}{3}\ \pi v^2\ (3\ r - v)$

» » » výseku $= \frac{2}{3}\ \pi r^2 v$.

Litera v znamená v oboch výšku zodpovedajúcej im guľovej čiapky.

Kubičný obsah guľového kolečka $= \frac{1}{6} \pi v (3 R^2 + 3 r^2 + v^2)$.

Litera v značí výšku či hrúbku kolečka a R a r polmery oboch hraničných kruhovitých plôch.

Srovnáme-li kubičné obsahy dvoch rozdielne polmery majúcich gúľ, na pr. R a r, tedy je kubičný obsah: jednej $\frac{4 R^3\pi}{3}$, druhej $\frac{4 r^3\pi}{3}$

Z tohoto ale vyplýva, že

$K : k = \frac{4 R^3\pi}{3} : \frac{4 r^2\pi}{3} = R^3 : r^3$ t. j. kubičné obsahy dvoch rozdielnych gúľ, stoja v tom pomere jeden k druhému, ako kubičné čísla z ich polmerov. Tak na pr. má-li polmer nejakej gule 3 *dm* a druhej 1 *dm*, tedy stoja ich kubičné obsahy v tom pomere jeden k druhému ako $3^3 : 1^3$ či $27 : 1$, t. j. tá prvá je 27-kráť väčšia než posledná.

Úlohy. 1. Nejakej gule polmer má 3 *dm*; koľký je jej kubičný obsah?

Rozl. $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.14 : 3 = 113.04$ dm^3.

2. Koľko váži 0.2 *dm* v polmere majúca olovená guľa; jestli váha 1 dm^3 olova je 11.35 *kg*?

Rozl. Poneváč kubičný obsah otáznej gule je $4 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 3.14 : 3 = 0.3349$ dm^3, preto váži táže $0.3349 \times 11.35 = 3.78$ *kg*.

3. Jestli kubičný obsah nejakej gule je 0.523 dm^3, koľký je jej polmer?

Rozl. $r = \sqrt[3]{\frac{3 \times 0.523}{4 \times 3.14}} = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

2. Koľko kubičných zemepisných míľ obsahuje v sebe naša zem, jestli predstavíme si ju čo guľu, ktorej polmer má 859.87 míľ?

Rozl. $4 \times 859.87 \times 859.87 \times 859.87 \times 3.14 : 3 = ?$

§ 73. O vypočítaní váhy telies z ich kubičného obsahu a z ich pomernej váhy.

Ako známo, každé teleso na zemi tlačí svoju podlôčku na ktorej leží a to preto, bo ho zem ku sebe priťahuje. Tento tlak telesa menujeme jeho *prostou* váhou. Pri vyhľadávaní prostej váhy nejakého telesa neberieme ohľad na jeho kubičný obsah, či na veľkosť jeho objemu. Tak na pr. dľa prostej váhy, predávame a kupujeme múku, mäso atď.

Krem prostej váhy rozoznávame ešte i takzvanú *pomernú* alebo *mernú* váhu t. j. tú váhu, koľkú má nejaká jednička kubičnej miery na pr. jeden kubičný decimeter nejakého telesa. Tak na pr. odvážime-li 1 dm^3 liatiny, obdržíme pomernú váhu liatiny; podobne, odvážime-li 1 dm^3 olova, obdržíme pomernú váhu olova atď.

Poneváč 1 dm^3 liatiny váži 7·21 *kg*, tedy je pomerná váha liatiny 7·21 *kg*, a poneváč 1 dm^3 olova váži 11·35 *kg*, tedy je pomerná váha olova: 11·35 *kg* atď.

Keďže ale 1 dm^3 liatiny váži 7·21 *kg*, tak 2 dm^3 tejže liatiny váža 2 $\times$ 7·21 *kg*, a 3 dm^3 3 $\times$ 7·21 *kg* atď.

Podobne, keďže 1 dm^3 olova váži 11·35 *kg*, tak 2 dm^3 olova váža dvakrát toľko či 2 $\times$ 11·35 *kg*, a 3 dm^3 trikrát toľko či 3 $\times$ 11·35 *kg* atď.

Z tohoto vyplýva, že *prostú váhu nejakého telesa najdeme, jestli jeho, v kubičných decimetroch vyslovený kubičný obsah, jeho pomernou váhou násobíme.*

Prostá váha $=$ *kubičný obsah* $\times$ *pomerná váha.*

Kubičný obsah buď vyslovený v kubičných decimetroch a pomerná váha v kilogrammoch. Alebo, kubičný obsah buď vyslovený v kubičných centimetroch a pomerná váha v grammoch.

Úlohy. 1. Koľko *kg* váži 128 dm^3 obsahujúci svrčinový klát, jestli pomerná váha svrčinového dreva je 0·47 *kg*?

Rozl. 128 $\times$ 0·47 či 60·16 *kg*.

2. Koľko váži 0·076 dm^3 či 76 cm^3 živého striebra jestli jeho pomerná váha je 13·60 *kg*?

Rozl, 0·076 $\times$ 13·60 *kg* či 1·0336 *kg*. Má-li tedy prierez barometrovej rúrky podobu a veľkosť štvorcového centimetra, a stojí-li v nom obsažená ortuť 76 *cm* vysoko, tenkrát váži celý stĺp v nej obsaženej ortuti 1·0336 *kg*. A poneváč ortuť v rúrke udržuje len tlak vonkajšieho povetria, preto i tohoto tlak obnáša na 1 cm^2 veľkú plochu, tiež 1·0336 *kg*.

3. Koľko olovených 2 *cm hrubých guliek* dá sa uliať zo 4 *kg*-ov olova, keď pomerná váha olova je 11·35 *kg*?

Rozl. Najprv vyhľadáme váhu jednej z otázných guliek, a potom premeriame touto 4 *kg*.

Kubičný obsah $=$ 4 $\times$ 0.01 $\times$ 0.01 $\times$ 0.01 $\times$ 3.14 : 3 $=$ 0.000418 dm^3.

Váha $=$ 0·000418 $\times$ 11·35 $=$ 0·004744 *kg*.

Koľkokrát 0·004744 *kg* v 4 *kg* nachodí sa, toľko guliek. 4 : 0·004744 $=$ 843.

Poneváč prostá váha rovná sa násobku z kubičného obsahu a pomernej váhy, preto hubičný obsah nejakého telesa najdeme jestli jeho prostú váhu pomernou váhou rozdelíme.

$$\text{Kubičný obsah} = \frac{\text{prostá váha (v } kg\text{-och}}{\text{pomerná (váha } kg\text{-och).}}$$

Tak na pr. kubičný obsah nejakého 21·63 *kg* ťažkého kusa liatiny najdeme, jestli túto jeho prostú váhu pomernou váhou liatiny či 7·21-mi rozdelíme. Poneváč 7·21 v 21·63 nachodí sa 3 kráť, preto kubičný obsah otázneho kusu obnáša 3 dm^3.

Týmto spôsobom možno i bez merania kubičný obsah rozličných telies vypočítať.

Podobne, mernú váhu nejakého telesa najdeme, jestli jeho prostu kubičným obsahom rozdelíme.

$$\text{Merná váha} = \frac{\text{prostá váha (v } kg\text{-och)}}{\text{kub. obsah (v } dm^3\text{-och).}}$$

Úlohy. Nejaká strieborná tyčka váži 28·5 *kg*; koľký je jej kubičný obsah?

Rozl. Poneváč merná váha striebra je 10·51 *kg*, preto je jej kubičný obsah = 28·5 : 10·51 = 2·711 dm^3.

2. Nejaká mramorová guľa váži 20 *kg*, koľký je jej kubičný obsah?

Rozl. Poneváč merná váha mramoru je 2·72 *kg*, tedy je jej kubičný obsah = 20 : 2·72 = 7·352 dm^3.

Merná váha prepaľovanej a 4⁰ *C* teplej vody t. j. váha 1 kubičného decimetra takejto vody, je 1 kilo.

Podobne je merná váha, či váha kubičného decimetra:

olova	11 *kg* 352 *gr*	mramoru	2·717 *kg*		
striebra	10·474 *kg*	železa	7·789	»	
ľadu	0·916 »	korku	0·240	»	
bezvodného liehu	0·793 »	ortute	13·598	»	
zlata	19·325 »	platiny	21·150	»	
skla	2·660 »	slon. kosti	1·917	»	
vápenca	2·700 »	granitu	2·700	»	
cinku	7·190 »	cínu	7·290	»	
cukru	1·500 »	mede	8. 88	»	(kovanej)
bukového dreva	0·740 »	mede	8· 79	»	(liatej)
borovice	0·520 »	kamen. uhlia	1·300	»	
pieskovca	2·300 »	železa	7· 79	»	(kovaného).

Poznámka. Nepravidelných a vo vode nerozpustných telies kubičný obsah priblížene vyhľadáme, jestli ich až do splna vodou naplnenej nádoby pohrúžime, a nimi vytisnutú vodu litrom premeriame. Koľko nimi vytisnutá voda obsahuje v sebe litrov, asi toľko má otázne teleso kubičných decimetrov a koľko decilitrov asi toľkokrát 100 kubičných centimetrov; a koľko centilitrov asi toľkokrát 10 kubičných centimetrov.

§ 74. O vymeriavaní pltného a klátového dreva.

Poneváč pltné a klátové drevo nepredstavuje ani pravidelný kužel ani pravidelný valec alebo pravidelnú kužlovú kyptu, preto možno ich kubičný obsah len priblíženo vymerať a vypočítať.

Pltného dreva kubičný obsah, len tak povrchne najdeme, jestli v jeho stredu ležiacu priesečnú plochu, jeho celou dĺžkou násobíme. Pod otáznou priesečnou plochou, rozumieme tú plochu, ktorú by sme obdržali, keby sme ho v jeho stredu rozpílili.

Túto plochu možno alebo z objemu alebo z priemeru vypočítať.

Niečo priblíženejšie kub. obsah otázneho pltného dreva alebo nejakého stromu obdržíme, jestli ho na viac asi 5 *m* dlhých kusov podelíme, a každého kusa kub. obsah na hor udaný spôsob vyrátame, a všetkých kub. obsahy dovedna sčítame.

Podobne, vyhľadávame i kub. obsah klátov, t. j. vypočítame v ich stredu nalezajúcu sa priesečnú plochu a násobíme ju celou dĺžkou.

Ležia-li vymerať sa majúce kláty na hŕbe, jeden na druhom tak, že otáznu v ich stredu nalezajúcu sa priesečnú plochu nemožno vymerať, vtedy vymeriame len tenšieho konca priemer, zväčšíme ho asi o 3 *cm*, a takto zväčšený priemer vezmeme za priemer v jeho stredu nalezajúcej sa priesečnej plochy.

O mnoho priblíženejšie nejakého kláta kub. obsah najdeme, jestli vrchnej a spodnej základnej plochy štvorcový obsah vyhľadáme a zo súčtu oboch polovicu vezmeme a túto jeho dĺžkou násobíme.

Úlohy. 1. Nejaké 20 *m* dlhé pltné drevo má v objeme vo svojom stredu 70 *cm*; koľký je jeho kub. obsah (priblíženo rátajúc)?

Rozl. Poneváč objem je 70 *cm*, preto je priemer $70 : 3{\cdot}14 = 22{\cdot}2$ *cm* a polmer $11{\cdot}1$ *cm*. V stredu dreva nalezajúca sa priesečná plocha $11{\cdot}1 \times 11{\cdot}1 \times 3{\cdot}14 = 38{\cdot}68\ cm^2$ či $0{\cdot}3868\ dm^2$. Kub. obsah $= 200 \times 0{\cdot}386 = 77{\cdot}2\ dm^3$.

2. Nejaký 5 *m* dlhý klát, má v priemeri v tenšom konci 40 *cm* a v hrubšom 60 *cm*; koľký je jeho kub. obsah?

Rozl. Spodná zákl. plocha $= 2 \times 2 \times 3{\cdot}14 = 4 \times 3{\cdot}14 = 12{\cdot}56\ dm^2$
Vrchná » » $= 3 \times 3 \times 3{\cdot}14 = 9 \times 3{\cdot}14 = 28{\cdot}26\ dm^2$
Kub. obsah $= (12{\cdot}56 + 28{\cdot}26) : 2 \times 50 = 1020{\cdot}5\ dm^3$

t. j. polovicu zo súčtu, zo štvorcových obsahov oboch základných plôch, násobíme dĺžkou.

3. U nejakého 5 *m* dlhého kláta má polmer priesečnej, v jeho stredu nalezajúcej sa plochy 25 *cm*; koľký je jeho kub. obsah?

Rozl. $2{\cdot}5 \times 2{\cdot}5 \times 3{\cdot}14 \times 50 = 981\ dm^3$.

Je-li vymerať sa majúce drevo na štyri uhly okresané a sú-li jeho základné plochy shodné, tenkrát vyhľadáme jeho kub. obsah tak, ako sme kub. obsah prismy vyhľadali, t. j. základnú plochu násobíme výškou. (Viď § 54.)

Sú-li obe základné plochy na štyri strany okresaného dreva neshodné avšak jedna druhej podobné, tedy podobá sa tože okyptenej pyramíde a preto vyhľadáme jeho kub. obsah ako okyptenej pyramídy. (Viď § 63.)

Takejto pyramídnej kypty kub. obsah priblíženo ešte i tak najdeme, jestli štvorcové obsahy z oboch zákl. plôch o sebe vyhľadáme a polovicu z ich súčtu dĺžkou kypty násobíme.

Tak na pr. sú-li zákl. plochy otáznej pyramídnej kypty štvorce, ktorých strany majú 3 *dm* a 2 *dm* a dĺžka kypty 5 *m*; teda je jej kub. obsah:

$$\begin{array}{r} \text{spodná plocha} = 2 \times 2 = 4\ dm^2 \\ \text{vrchná} \quad » \quad = 3 \times 3 = 9\ dm^2 \\ \hline \text{polovica z oboch} = 6{\cdot}5\ dm^2 \\ \text{kub. obsah: } 6{\cdot}5 \times 50 = 325{\cdot}0\ dm^3. \end{array}$$

V štôsoch poukladaného dreva kub. obsah vyhľadáme, jestli štôsu dĺžku, širku a výšku jedno s druhým násobíme, a z obdržaného kub. obsahu, na medzery medzi polenami sa nalezajúce 20%, a je-li veľmi riedko poukladané, 30% odčítame.

Tabuľka

obsahujúca v sebe kvadrátne a kubičné korene čísel od 1 až po 100.

Číslo	Kvadrátny koreň	Kubičný koreň	Číslo	Kvadrátny koreň	Kubičný koreň	Číslo	Kvadrátny koreň	Kubičný koreň
1	1·000	1·000	35	5·916	3·271	69	8·306	4·101
2	1·414	1·259	36	6·000	3·301	70	8·366	4·121
3	1·732	1·442	37	6·082	3·332	71	8·426	4·140
4	2·000	1·587	38	6·164	3·361	72	8·485	4·160
5	2·236	1·709	39	6·245	3·391	73	8·544	4·179
6	2·449	1·817	40	6·324	3·419	74	8·602	4·198
7	2·645	1·912	41	6·403	3·448	75	8·660	4·217
8	2·828	2·000	42	6·480	3·476	76	8·717	4·235
9	3·000	2·080	43	6·557	3·503	77	8·774	4·254
10	3·162	2·154	44	6.633	3·530	78	8·831	4·272
11	3·316	2·223	45	6·708	3·556	79	8·888	4·290
12	3·464	2·289	46	6·782	3·583	80	8·944	4·308
13	3·605	2·351	47	6·855	3·608	81	9·000	4·326
14	3·741	2·410	48	6·928	3·634	82	9·055	4·344
15	3·872	2·466	49	7·000	3·659	83	9·110	4·362
16	4·000	2·519	50	7·071	3·684	84	9·165	4·379
17	4·123	2·571	51	7·141	3·708	85	9·219	4·396
18	4·242	2·620	52	7·211	3·732	86	9·273	4·414
19	4·358	2·668	53	7·280	3·756	87	9·327	4·431
20	4·472	2·714	54	7·348	3·779	88	9·380	4·447
21	4·582	2·758	55	7·416	3·802	89	9·433	4·464
22	4·690	2·802	56	7·483	3·825	90	9·486	4·481
23	4·795	2·843	57	7·549	3·848	91	9·539	4·497
24	4·898	2·884	58	7·615	3·870	92	9·591	4·514
25	5·000	2·924	59	7·681	3·893	93	9·643	4·530
26	5·099	2·962	60	7·745	3·914	94	9·695	4·546
27	5·196	3·000	61	7·810	3·936	95	9·746	4·562
28	5·291	3·036	62	7·874	3·957	96	9·797	4·578
29	5·385	3·072	63	7·937	3·979	97	9·848	4·594
30	5·477	3·107	64	8·000	4·000	98	9·899	4·610
31	5·567	3·141	65	8·062	4·020	99	9·949	4·626
32	5·656	3·174	66	8·124	4·041	100	10·000	4·641
33	5·744	3·207	67	8·185	4·061			
34	5·830	3·239	68	8.426	4·081			

Tak na pr. kvadrátny koreň čísla 30 je 5·477. A preto, obnáša-li štvorcový obsah nejakého štvorca 30 m^2, tedy má jeho jedna strana

5·477 *m*. A naopak, má-li jedna strana nejakého štvorca 5·477 *m*, tedy obnáša jeho štvorcový obsah 30 m^2.

Podobne, kubičný koreň čísla 30 sú 3·107. A preto, obnáša-li kubičný obsah nejakého kubíka 30 m^3, tedy má jeho jedna strana 3·107 *m*. A naopak, má-li jedna strana nejakého kubíka 3·107 *m*, tedy obnáša jeho kubičný obsah 30 m^3.

Kvadrátny a kubičný koreň čísel vyše 100, dľa tejto tabuľky najdeme, jestli také na dva (alebo viac) činitele rozložíme, a jednotlivých činiteľov korene jeden s druhým násobíme. Tak na pr. kvadrátny koreň čísla 640 či $\sqrt{640} = \sqrt{64 \times 10} = \sqrt{64} \times \sqrt{10} = 8 \times 3·162$ či 25·296.

Podobne kubičný koreň čísla 640 či $\sqrt[3]{640} = \sqrt[3]{64 \times 10} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{10} = 4 \times 2·154$ či 8·616.

Poznámka. 1. Pochop kvadrátnych čísel a spôsob vyhľadávania kvadrátnych koreňov nachodí sa na 90. a pochop kubičných čísel a spôsob vyhľadávania kubičných koreňov na 153. strane.

Poznámka. 2. Miesto »na dvoch činiteľov« užíval som, za príkladom jednoho znateľa slov. reči: »na dva činitele.« Či je tento posledný výraz správnejší, to nech rozhodnú povolaní jazykozpytci.

265381379623589

Obsah.

Časť tretia. Telesomerba (Stereometria).

Strana

Opravy.

Strana 27. miesto *RC* má stáť: *BC*.

» 37. 24. riadok od vrchu miesto 2 *m*, má stáť: 20 *m*.

» 39. 10. riadok od spodku miesto prímku tetivou má stáť: prímku, na pr. *BC*, tetivou.

» 42. 23. riadok od vrchu, miesto: 12·84 *dm* má stáť: 18·8 *dm*.

» 48. § 13. miesto: údov, má stáť: uhlov.

» 55. 11. riadok od vrchu, miesto slova: obluku, má stáť: uhlomeru.

» 65. miesto žiebka, má stáť: žliebka.

» 73. obrazec 72 stojí naopak, má stáť, čím hore tým dolu.

» 73. 12. riadok od vrchu, miesto tak, má stáť: také.

» 93. miesto $(s-a) = 5$ má stáť: $(s-a) = 1$ a miesto $(s-b) = 4$ má stáť: $(s-b) = 2$.

» 93. posledný riadok, miesto: štvorca, má stáť: štvoruhelníka.

» 101. $Hh = 47.1$ a nie 77.1 *m* Lichobežník *FfgG* má 2180·64 *CcdD* má 2507·76 *GghH* má 1743·86 a $Hlhi =$ 1613·30 m^2.
Celý mnohouhelník: 13172·66 m^2.

» 107. Na obrázci 116 prímky: *mv*, *nx*, *oy* a *pz*, majú rovnobežne ležať k *AB*.

» 121. miesto záväzkami, má stáť: záveskami.

» 129. 12. riadok od vrchu, miesťo *ABm*, má stáť: *ADm*.

» 131. 5. riadok od spodku, miesto: Viď § 26, má stáť: Viď § 23. Úlohy.

» 138. 24. riadok, miesto $\sqrt{4^2}-2^2$ má stáť: $\sqrt{(4^2-2^2)}$.

» 138. miesto: $\sqrt{\frac{(1^2-0{\cdot}86^3)}{2}}$ má stáť: $\frac{\sqrt{(1^2-0.86^2)}}{2}$.

» 150. miesto km^1 má stáť: km^3.

» 155. Obr. 161. stojí hore nohami.

» 160. Obr. 166. stojí hore nohami.

» 167. miesto 105.62965 má stáť: 105.629—65.

» 174. miesto $+ 342$ má stáť: $+ 432$.

» 179. 11. riadok od vrchu, miesto $r \times r\,\pi$, má stáť: $r \times r \times \pi$.

» 184. Kubičný obsah käde = 1889 a nie 1899 dm^3 a preto vleje sa do nej 18 *hl* a 89 litrov.

» 191. 14. riadok od vrchu, miesto »koľký je priemer« má stáť: koľký je jej priemer, a miesto »koľký je polmer«, má stáť: koľký je jej polmer.